TELEEXERCICES04-T05
Enoncé

Exercice 01

Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}z^{2n+1}$.

Indications :
On posera $u_n(z)=\binom{2n}{n}z^{2n+1}$. Alors, pour $z\neq 0$, on simplifiera $\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}$.

Exercice 02

On veut ici déterminer l'unique solution de :

$$(E)\ \ y'(t)+3y(t)=e^t+te^{-3t}+\cos t+2 \text{ avec } y(0)=0.$$

1. **On utilise la méthode de superposition.**
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $\mathcal{S}_{EH}(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une solution particulière y_{p_1} de $(E_1) : y'(t)+3y(t)=e^t$.
   (c) Déterminer une solution particulière y_{p_2} de $(E_2) : y'(t)+3y(t)=t\,e^{-3t}$.
   (d) Déterminer une solution particulière y_{p_3} de $(E_3) : y'(t)+3y(t)=\cos t$.
   (e) Déterminer une solution particulière y_{p_4} de $(E_1) : y'(t)+3y(t)=2$.
   (f) En déduire la solution unique de (E).
2. **On utilise la méthode de variation de la constante**.
   (a) On pose $y_0(t)=e^{-3t}$. Vérifier que y_0 est une solution de l'équation homogène.
   On pose $y(t)=K(t)y_0(t)$ et on suppose que y vérifie (E). Calculer $K'(t)$.
   (b) Trouver une primitive de $e^{3t}\cos t$ de la forme $e^{3t}(A\cos t+B\sin t)$.
   (c) En déduire $K(t)$ puis $y(t)$. Retrouver le résultat de **1.**

Indications :
1-b On cherche une solution y_{p_1} de la forme $y_{p_1}(t)=Ae^t$.
1-c On cherche une solution y_{p_2} de la forme $y_{p_2}(t)=t(Bt+C)e^{-3t}$.
1-d On cherche une solution y_{p_3} de la forme $y_{p_3}(t)=D\cos t+E\sin t$.
1-e On cherche une solution y_{p_4} de la forme $y_{p_4}(t)=L$.
1-f On utilise la condition initiale après avoir remarqué que $y(t)=y_h(t)+y_{p_1}(t)+y_{p_2}(t)+y_{p_3}(t)+y_{p_4}(t)$.
2-a Pour calculer $K'(t)$, on remplace $y(t)$ par $K(t)e^{-3t}$ dans $y'(t)+3y(t)=e^t+te^{-3t}+\cos t+2$.
2-b Pour trouver une primitive de $e^{3t}\cos t$ de la forme $e^{3t}(A\cos t+B\sin t)$, il suffit de dériver $e^{3t}(A\cos t+B\sin t)$ et de dire que c'est $e^{3t}\cos t$. On en déduit A et B.

Correction

Exercice 01

Posons $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Alors, pour $z \neq 0$,

$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{2(n+1)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{((n)!)^2}{(2n)!} |z|^2.$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} |z|^2 = 4|z|^2$.
Alors, si $0 < |z_0| < \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}(z_0)}{u_n(z_0)} \right| = 4|z_0|^2 < 1$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} z_0^{2n+1}$ converge. Donc $R \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Si $|z_0| > \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}(z_0)}{u_n(z_0)} \right| = 4|z_0|^2 > 1$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} z_0^{2n+1}$ diverge.
Donc $R \leqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow R = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 02

On veut ici déterminer l'unique solution de :

$$(E)\ \ y'(t) + 3y(t) = e^t + te^{-3t} + \cos t + 2 \text{ avec } y(0) = 0.$$

1. On utilise la méthode de superposition.

1-a Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $\mathcal{S}_{EH}(\mathbb{R})$.
Si l'on note $\mathcal{S}_{EH}(\mathbb{R})$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée,

$$\mathcal{S}_{EH}(\mathbb{R}) = \{t \mapsto Ke^{-3t},\ K \in \mathbb{R}\}.$$

1-b Déterminons une solution particulière y_{p_1} de $(E_1) : y'(t) + 3y(t) = e^t$.
Puis, on pose $b_1(t) = e^t$. On cherche une solution y_{p_1} de :

$$(E_1) : y'(t) + 3y(t) = b_1(t)$$

de la forme $y_{p_1}(t) = Ae^t$. En identifiant, $A = \frac{1}{4}$.
1-c Déterminons une solution particulière y_{p_2} de $(E_2) : y'(t) + 3y(t) = t\,e^{-3t}$.
Puis, on pose $b_2(t) = te^{-3t}$. On cherche une solution y_{p_2} de :

$$(E_2) : y'(t) + 3y(t) = b_2(t)$$

de la forme $y_{p_2}(t) = t(Bt + C)e^{-3t}$.
En identifiant, $B = \frac{1}{2}$ et $C = 0$.
1-d Déterminons une solution particulière y_{p_3} de $(E_3) : y'(t) + 3y(t) = \cos t$.
Puis on pose ensuite $c_3(t) = \cos t$. On cherche une solution y_{p_3} de :

$$(E_3) : y'(t) + 3y(t) = b_3(t).$$

Elle est de la forme $y_{p_3}(t) = D\cos t + E\sin t$.
En identifiant, on trouve $D = \frac{3}{10}$ et $E = \frac{1}{10}$.
1-e Déterminons une solution particulière y_{p_4} de $(E_1) : y'(t) + 3y(t) = 2$.
Enfin, on pose $b_4(t) = 2$. On cherche une solution y_{p_4} de :

$$(E_4) : y'(t) + 3y(t) = b_4(t)$$

de la forme $y_{p_4}(t) = L$. Et : $L = \frac{2}{3}$.

1-f En déduire la solution unique de (E).
Ainsi, sans la condition initiale,

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{t^2}{2}e^{-3t} + \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + \frac{2}{3} + Ke^{-3t}.$$

La condition $y(0) = 0$ donne $K = -\dfrac{73}{60}$.

2 On utilise la méthode de variation de la constante.

2-a On pose $y_0(t) = e^{-3t}$. Vérifions que y_0 est une solution de l'équation homogène.
C'est immédiat avec **1-a**.
On pose $y(t) = K(t)y_0(t)$ et on suppose que y vérifie (E). Calculons $K'(t)$.
Pour calculer $K'(t)$, on remplace $y(t)$ par $K(t)e^{-3t}$ dans $y'(t) + 3y(t) = e^t + te^{-3t} + \cos t + 2$.
Alors :

$$K'(t)e^{-3t} - 3K(t)e^{-3t} + 3K(t)e^{-3t} = e^t + te^{-3t} + \cos t + 2.$$

Donc : $K'(t) = e^{3t}\left[e^t + te^{-3t} + \cos t + 2\right] = e^{4t} + t + e^{3t}\cos t + 2e^{3t}$.

2-b Trouvons une primitive de $e^{3t}\cos t$ de la forme $e^{3t}(A\cos t + B\sin t)$.
On dérive $z(t) = e^{3t}(A\cos t + B\sin t)$ et donc $z'(t) = e^{3t)(-A\sin t + 3A\cos t + B\cos t + 3B\sin t)}$.
Cela donne : $-A + 3B = 0$ et $3A + B = 1$. Et alors $A = \dfrac{3}{10}$ et $B = \dfrac{1}{10}$.
Une autre façon est de passer dans $\mathbf{C}$.

$$\begin{aligned}
\int e^{3t}\cos t\,dt &= \int \mathrm{Re}\left(e^{3t+it}\right)\,dt \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{3+i}e^{3t+it}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{3-i}{10}e^{3t+it}\right) \\
&= \frac{e^{3t}}{10}\mathrm{Re}\left((3-i)e^{it}\right) \\
&= \frac{3}{10}e^{3t}\cos t + \frac{1}{10}e^{3t}\sin t.
\end{aligned}$$

2-c En déduire $K(t)$ puis $y(t)$.
On sait que : $K'(t) = e^{3t}\left[e^t + te^{-3t} + \cos t + 2\right] = e^{4t} + t + e^{3t}\cos t + 2e^{3t}$.
Il reste à intégrer quatre fonctions classiques (et à une constante additive près) :

$$\int e^{4t}\,dt = \frac{1}{4}e^{4t},\ \int t\,dt = \frac{t^2}{2},\ \int 2e^{3t}\,dt = \frac{2}{3}e^{3t}$$

et

$$\int e^{3t}\cos t\,dt = \frac{3}{10}e^{3t}\cos t + \frac{1}{10}e^{3t}\sin t.$$

Ainsi : $H(t) = \dfrac{1}{4}e^{4t} + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2}{3}e^{3t} + \dfrac{3}{10}e^{3t}\cos t + \dfrac{1}{10}e^{3t}\sin t$.
Donc $K(t) = H(t) + L$, où $L \in \mathbb{R}$.

Étape 3

Puis une solution particulière de (E) est : $y_p(t) = H(t)y_0(t)$.
On en déduit toutes les solutions de (E) :

$$\mathcal{S}_E(\mathbb{R}) = \{t \mapsto Le^{-3t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{t^2}{2}e^{-3t} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t,\ L \in \mathbb{R}\}.$$

Il reste à appliquer $y(0) = 0$ et on retrouve $L = -\dfrac{73}{60}$.