TELEEXERCICES04-T05
Enoncé

Exercice 01

Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Indications :
On posera $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Alors, pour $z \neq 0$, on simplifiera $\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}$.

Exercice 02

On veut ici déterminer l'unique solution de :

$$(E)\ \ y'(t) + 3y(t) = e^t + te^{-3t} + \cos t + 2 \text{ avec } y(0) = 0.$$

1. **On utilise la méthode de superposition.**
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $\mathcal{S}_{EH}(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une solution particulière y_{p_1} de $(E_1) : y'(t) + 3y(t) = e^t$.
   (c) Déterminer une solution particulière y_{p_2} de $(E_2) : y'(t) + 3y(t) = t\,e^{-3t}$.
   (d) Déterminer une solution particulière y_{p_3} de $(E_3) : y'(t) + 3y(t) = \cos t$.
   (e) Déterminer une solution particulière y_{p_4} de $(E_1) : y'(t) + 3y(t) = 2$.
   (f) En déduire la solution unique de (E).
2. **On utilise la méthode de variation de la constante**.
   (a) On pose $y_0(t) = e^{-3t}$. Vérifier que y_0 est une solution de l'équation homogène.
   On pose $y(t) = K(t)y_0(t)$ et on suppose que y vérifie (E). Calculer $K'(t)$.
   (b) Trouver une primitive de $e^{3t}\cos t$ de la forme $e^{3t}(A\cos t + B\sin t)$.
   (c) En déduire $K(t)$ puis $y(t)$. Retrouver le résultat de **1.**

Indications :
1-b On cherche une solution y_{p_1} de la forme $y_{p_1}(t) = Ae^t$.
1-c On cherche une solution y_{p_2} de la forme $y_{p_2}(t) = t(Bt + C)e^{-3t}$.
1-d On cherche une solution y_{p_3} de la forme $y_{p_3}(t) = D\cos t + E\sin t$.
1-e On cherche une solution y_{p_4} de la forme $y_{p_4}(t) = L$.
1-f On utilise la condition initiale après avoir remarqué que $y(t) = y_h(t) + y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) + y_{p_3}(t) + y_{p_4}(t)$.
2-a Pour calculer $K'(t)$, on remplace $y(t)$ par $K(t)e^{-3t}$ dans $y'(t) + 3y(t) = e^t + te^{-3t} + \cos t + 2$.
2-b Pour trouver une primitive de $e^{3t}\cos t$ de la forme $e^{3t}(A\cos t + B\sin t)$, il suffit de dériver $e^{3t}(A\cos t + B\sin t)$ et de dire que c'est $e^{3t}\cos t$. On en déduit A et B.