TELEEXERCICES04-T08
Enoncé

Exercice 01

Résoudre le problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{lcc} x_1'(t) & = & 3\,x_1(t) - 2\,x_2(t) + 2\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & 2\,x_2(t) + \,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & x_2(t) + 2\,x_3(t) \\ x_1(0) & = & x_2(0) \;=\; x_3(0) \;=\; 1 \end{array}\right.$

Indications :

Il est clair que l'on commence par diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 02

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt$.

Indications :

On a un pb en 0 et un pb en 1. Faire un changement de variable pour le pb en 1.

Correction

Exercice 01

Résolvons le problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 3\,x_1(t) - 2\,x_2(t) + 2\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & 2\,x_2(t) + \,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & x_2(t) + 2\,x_3(t) \\ x_1(0) & = & x_2(0) \;=\; x_3(0) \;=\; 1 \end{array}\right.$

Il est clair que l'on commence par diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On trouve pour polynôme caractéristique : $\chi_A(t) = (t-3)^2(t-1)$.
Un tour de moulinette et $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On résout $Y'(t) = DY(t)$ avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne : $y_1(t) = K_1 e^{3t}$, $y_2(t) = K_2 e^{3t}$, $y_3(t) = K_3 e^{t}$.
Puis $X(t) = PY(t)$ et comme $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$,

$$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = e^{3t}.$$

Exercice 02

Étudions la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0,1[$ et donc le seul problème est en 0 et en 1.

• Pb en 0.

On a : $f(t) \sim \ln t$ en $t = 0$. Comme $\mapsto \ln t$ est intégrable en 0, de primitive $t \mapsto t\ln t - t$, il y a convergence en 0.

• Pb en 1.

On fait le changement de variable $t = 1 - x$. On a alors :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt = -\int_1^0 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}$ est équivalente en $x = 0$ à :

$$\frac{-x}{\sqrt{x}} = -\sqrt{x}.$$

La fonction $x \mapsto -\sqrt{x}$ est continue et intégrable en 0. Donc $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable en 1.