TELEEXERCICES04-T06
Enoncé

Exercice 01

Écrire sous forme factorisée le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Indications :
On pourra par exemple commencer par $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.

Exercice 02

Montrer la convergence de l'intégrale en effectuant un changement de variable qui permettra le calcul de :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}.$$

Indications :
L'indication est dans l'énoncé.

Exercice 03

F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels de E, montrer :

$$F \subset H \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap H.$$

Indications :
On posera $\vec{x} \in F + (G \cap H)$ et donc $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, où $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G \cap H$. On montrera que $\vec{x} \in (F + G) \cap H$. Et réciproquement.

Correction

Exercice 01

Écrivons sous forme factorisée le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Comme on s'inspire de l'indication, on commence par $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.

$$\Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Puis, on fait $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Cela donne :

$$\Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-a-c & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

Exercice 02

Montrons la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln^2 t}$ est continue sur $[e, +\infty[$ et donc le seul pb est en $+\infty$.
Faisons le changement de variable : $x = \ln t$. On a : $dx = \dfrac{dt}{t}$. Cela donne :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Exercice 03

F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels de E, montrons :

$$F \subset H \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap H.$$

• Inclusion directe.
On pose $\vec{x} \in F + (G \cap H)$ et donc $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, où $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G \cap H$.
Montrons que $\vec{x} \in (F + G) \cap H$.
Comme $\vec{z} \in G \cap H$, $\vec{z} \in G$. Donc : $\vec{x} \in F + G$.
Puis, $\vec{y} \in F$ donc $\vec{y} \in H$ et comme $\vec{z} \in H$, $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \in H$.
• Inclusion réciproque.
Supposons $\vec{x} \in (F + G) \cap H$. Alors $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.
Donc $_vecx_F \in H$. Comme $\vec{x} \in H$, $\vec{x}_G = \vec{x} - \vec{x}_F \in H$.
Ainsi, $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, avec $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G \cap H$.