TELEEXERCICES04-T07
Enoncé

Exercice 01

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, F (resp. G) est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ (resp. des matrices $\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}$), où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Trouver une base de F et une base de G.
3. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F \oplus G$.

Indications :
1. On peut montrer que F et G sont des $Vect$ et on aura une famille génératrice dans chacun des cas ce qui permettra de s'avancer pour la base.
3. On peut voir que $F \cap G = 0$ et que comme $\dim F + \dim G = \dim M_2(\mathbf{R}) = \dim(F+G)$, on peut conclure.

Exercice 02

Ici $c \in \mathbf{R}_+^\star$ fixé. Déterminer $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation (E) dite des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

à l'aide du changement $u = x - cy$, $v = x + cy$.

Indications :
On commence par calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ avec $g(u,v) = f(x,y)$.

Correction

Exercice 01

1.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, F (resp. G) est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ (resp. des matrices $\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}$), où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

1. Montrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

On a :

$$\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose : $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que

$$F = \text{Vect}\,(F_1, F_2).$$

De même,

$$\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose : $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que

$$G = \text{Vect}\,(G_1, G_2).$$

On voit rapidement que (F_1, F_2) est libre car :

$$a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a immédiatement $a = b = 0$.
On montre de même que (G_1, G_2) est libre.

3. Montrons que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F \oplus G$.

On a déjà : $\dim F = \dim G = 2$.
Puis si $A \in F \cap G$, il existe a, b c et d tels que

$$\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3c+d \\ -d & -2c+d \end{pmatrix}.$$

Immédiatement, $b = d$ et $a = c$. Donc : $2a + b = 3a + b$ et donc $a = 0$.
Et de même $d = b = 0$. En conclusion A est la matrice nulle et : $\dim\,(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G) = 4$ et donc $F + G = M_2(\mathbf{R})$.

Exercice 02

Ici $c \in \mathbf{R}_+^\star$ fixé.
Déterminons $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation (E) dite des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

à l'aide du changement $u = x - cy$, $v = x + cy$.
On commence par calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ avec $g(u,v) = f(x,y)$.
On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. .$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{array} \right. .$$

Et de même,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. .$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & -c\dfrac{\partial g}{\partial u} + c\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{array} \right. .$$

On peut redériver :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) \end{array} \right. .$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}.$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\Bigg(\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\Bigg(\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}.$$

Cela donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Et de même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

En reportant dans l'équation :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

Alors : $\dfrac{\partial g}{\partial v} = F(v)$ et $g(u,v) = G(u) + H(v)$, où H est une primitive de F. Les fonctions G et H sont de classe C^2 et :

$$\forall (x,y),\ f(x,y) = G(x - cy) + H(x + cy).$$