TELEEXERCICES04-T03

Enoncé

Exercice 01

Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} z^{2n+1}.$$

Indications :
On rappelle que $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$.

Exercice 02

Soit a un réel fixé et $A_a = \{P \in \mathbf{R}_n[X],\, P(a) = 0\}$.

1. Montrer que A_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\{1, X - a, (X - a)X, (X - a)X^2, ..., (X - a)X^{n-1}\}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Trouver la dimension de A_a et un supplémentaire de A_a dans $\mathbf{R}_n[X]$.

Indications :
1. Pour montrer que A_a est un sous-espace vectoriel, il suffit de montrer que si P et Q sont dans A_a, alors $P + Q \in A_a$ et $\alpha P \in A_a$ pour $\alpha \in \mathbf{R}$.
2. On rappelle qu'une famille de polynômes tous différents est libre.
3. On rappelle que si P est un polynôme et la division euclidienne par $(X-a)$ donne : $P = (X-a)Q+P(a)$.