TELEEXERCICES04-T03
Enoncé

Exercice 01

Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}z^{2n+1}.$$

Indications :
On rappelle que $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$.

Exercice 02

Soit a un réel fixé et $A_a=\{P\in \mathbf{R}_n[X],\, P(a)=0\}$.

1. Montrer que A_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\{1, X-a, (X-a)X, (X-a)X^2, ..., (X-a)X^{n-1}\}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Trouver la dimension de A_a et un supplémentaire de A_a dans $\mathbf{R}_n[X]$.

Indications :
1. Pour montrer que A_a est un sous-espace vectoriel, il suffit de montrer que si P et Q sont dans A_a, alors $P+Q\in A_a$ et $\alpha P\in A_a$ pour $\alpha\in\mathbf{R}$.
2. On rappelle qu'une famille de polynômes tous différents est libre.
3. On rappelle que si P est un polynôme et la division euclidienne par $(X-a)$ donne : $P=(X-a)Q+P(a)$.

Correction

Exercice 01

Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

On a : $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$.
Posons $u_n(z) = \dfrac{(2n)!}{n!n!} z^{2n+1}$. On a :

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} z^{2n+3}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!} z^{2n+1}}.$$

Cela donne :

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z|^2.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\left| \dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right|$ tend vers $4|z|^2$.
Donc si $4|z|^2 < 1$ il y a convergence absolue et si $4|z|^2 > 1$, il y a divergence grossière.
Donc : $R = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 02

Soit a un réel fixé et $A_a = \{P \in \mathbf{R}_n[X],\, P(a) = 0\}$.
1. $(P + \alpha Q)(a) = P(a) + \alpha Q(a) = 0$. Donc si $(P, Q) \in A_a^2$, $P + \alpha Q \in A_a$.
2. Montrons que $\{1, X - a, (X - a)X, (X - a)X^2, ..., (X - a)X^{n-1}\}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Les polynômes sont de degré tous différents et forment une famille libre.
Puis $\dim \mathbf{R}_n[X] = n + 1$ et il y a $n + 1$ polynômes.
C'est donc une base.

3. On rappelle que si P est un polynôme et la division euclidienne par $(X - a)$ donne :
$P = (X - a)Q + P(a)$.
Donc $(X - a)Q \in A_a$ et $P(a) \in \mathbf{R}$.
Alors : $\mathbf{R}_n[X] = A_a + \mathbf{R}$.
De plus si $P \in A_a \cap \mathbf{R}$, $P = 0$. Comme $\dim \mathbf{R} = 1$ et $\dim \mathbf{R}_n[X] = n + 1$, ainsi,

$$\dim A_a = n.$$