TELEEXERCICES04-T04

Enoncé

Exercice 01

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux variables aléatoires X et Y de Bernoulli soient indépendantes est que : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Indications :
on suppose que $X \hookleftarrow \mathcal{B}(p_1)$ et $Y \hookleftarrow \mathcal{B}(p_2)$.
On remarquera que $E(XY) = P(XY = 1) = P((X = 1) \cap (Y = 1))$.
On verra de même $E(X) = P(X = 1)$ et $E(Y) = P(Y = 1)$. À vous de continuer.

Exercice 02

Pour $x \in \mathbf{R}^+$, on pose : $u(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

1. Étudier la fonction u.
2. On pose $f(x) = \arcsin(u(x))$. Quel est le domaine de définition de f ?
3. Démontrer que f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Calculer $f'(x)$.
4. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan(\sqrt{x})$.

Indications :
1. Ce qui est le plus important c'est le domaine de valeurs prises par u.
2. On rappelle que $\arcsin t$ est définie seulement si $t \in [-1,1]$.
3. On rappelle que $(\arcsin h(x))' = \dfrac{h'(x)}{\sqrt{1-h^2(x)}}$.
4. On rappelle que $(\arctan h(x))' = \dfrac{h'(x)}{1+h^2(x)}$.

Correction

Exercice 01

Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux variables aléatoires X et Y de Bernoulli soient indépendantes est que : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

- Sens direct : on suppose que $X \hookleftarrow \mathcal{B}(p_1)$ et $Y \hookleftarrow \mathcal{B}(p_2)$.

On remarque que :

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P(X = x_i)P(Y = y_j) = 1 \times P(XY = 1) = P((X = 1) \cap (Y = 1)).$$

On calcule de même :

$$E(X) = P(X = 1) \text{ et } E(Y) = P(Y = 1).$$

Alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1)P(Y = 1).$$

Alors $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendants équivaut à $(X = 1)$ et $\overline{(Y = 1)}$ aussi équivaut à $\overline{(X = 1)}$ et $(Y = 1)$ aussi équivaut à $\overline{(X = 1)}$ et $\overline{(Y = 1)}$ aussi.

Exercice 02

Pour $x \in \mathbf{R}^+$, on pose : $u(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

Étudions la fonction u.

On a : $u'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$.

u est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

On a $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ et u tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Donc u est à valeurs dans $[0, 1]$.

2. On pose $f(x) = \arcsin(u(x))$.

Comme $u(x) \in [0, 1]$, $f(x)$ existe et donc le domaine de définition de f est : $[0, +\infty[$.

3. f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et on a :

$$(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = \frac{\dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{4x}{(1+x)^2}}} = \frac{\dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}}{\sqrt{\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}}.$$

Cela donne :

$$(\arcsin u(x))' = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \frac{|1+x|}{|1-x|}.$$

Or $x > 0$ et $1 + x > 0$ donc :

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)|1-x|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 1. \end{cases}.$$

4. Exprimons $f(x)$ en fonction de $\arctan(\sqrt{x})$.

Posons $g(x) = \arctan(\sqrt{x})$. Alors $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

Donc si $x < 1$, $f(x) = 2\arctan\sqrt{x} + K$ et comme $f(0) = g(0) = 0$, $K = 0$.

Et si $x > 1$, $f(x) = -2\arctan\sqrt{x} + K$. Comme $-2\arctan\sqrt{x}$ tend vers $-\pi$ quand x tend vers $+\infty$, $K = \pi$.