TELEEXERCICES04-T02
Enoncé

Exercice 01

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.
2. En déduire les couples $(x_1,\, x_2)$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & 3\,x_1(t) - 5\,x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Indications :
Attention, on trouvera deux valeurs propres complexes conjuguées et pour avoir les solutions réelles du système différentiel, on pourra user d'Abraham de Moivre.

Exercice 02

Étude au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}.$$

Indications :
On commencera par trouver le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis celui de Arcsin à l'ordre 5. On passera à celui de f.

Correction

Exercice 01

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonalisons A dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.
On trouve : $\chi_A(t) = (t-(1-i))(t-(1+i))$ et rapidement les sous-espaces propres sont :

$$E_{1-i}(A) = \text{Vect}\left((5, 2+i)\right) \text{ et } E_{1+i}(A) = \text{Vect}\left((5, 2-i)\right).$$

Alors $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

2. On va en déduire les couples $(x_1,\, x_2)$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & 3\,x_1(t) - 5\,x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

On a en posant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$,

$$X'(t) = AX(t).$$

En posant $X(t) = PY(t)$ avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, on a :

$$Y'(t) = DY(t).$$

Cela donne :

$$\exists\,(k_1, k_2) \in \mathbf{C}^2,\; y_1(t) = k_1 e^{(1-i)t} \text{ et } y_2(t) = k_2 e^{(1+i)t}.$$

Cela donne :

$$\exists\,(k_1, k_2) \in \mathbf{C}^2,\; y_1(t) = k_1 e^t e^{-it} \text{ et } y_2(t) = k_2 e^t e^{it}.$$

Comme $X(t) = PY(t)$, il reste :

$$\exists\,(k_1, k_2) \in \mathbf{C}^2,\; x_1(t) = 5k_1 e^t e^{-it} + 5k_2 e^{it} \text{ et } x_2(t) = (2+i)k_1 e^t e^{-it} + (2-i)k_2 e^{it}.$$

Cela donne :

$$\exists\,(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2,\; x_1(t) = 5e^t(a_1 \cos t + a_2 \sin t) \text{ et } x_2(t) = e^t((2a_1 - A_2)\cos t + (a_1 + 2a_2)\sin t).$$

Exercice 02

Étudions au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}$.
On commence par trouver le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis celui de Arcsin à l'ordre 5. On passe ensuite à celui de f.
On a : $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^5)$.
Et donc :

$$f(x) = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^5)} - \frac{1}{x}.$$

Cela donne :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^4)} - 1\right).$$

Ce qui donne :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+\frac{x^4}{36}-1+o(x^4)\right) = -\frac{x}{6}-\frac{3x^3}{40}+\frac{x^3}{36}+o(x^3).$$

Et donc :

$$f(x) = -\frac{x}{6}-\frac{17x^3}{360}+o(x^3).$$

La tangente en O a pour équation $y = -\frac{x}{6}$ et la courbe est localement sous la tangente pour $x > 0$ et au dessus de la tangente pour $x < 0$.