CONCOUR BLANC BIS 2020. 2TSI

MATHEMATIQUES

Ce sujet concerne la manipulation des intégrales définies, en particulier leur calcul par une intégration par parties ou leur encadrement, les suites et les méthodes pour montrer leur convergence et trouver leurs limites, les restes de séries convergentes, les équivalents de suites ou de fonctions, les calculs de limites, les sommes de variables aléatoires réelles, le calcul de l'espérance et de la variance, les lois binomiales. Un peu de Python agrémente l'ensemble

Les calculatrices n'ont aucun intérêt.
La plupart du temps, on peut admettre les questions en amont pour traiter les questions en aval.

Partie I

Constante d'Euler-Mascheroni

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geqslant 1$ par la relation :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}.$$

On pose pour tout $n \geqslant 1$, $w_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

1. Prouver que, pour tout $p \geqslant 1$, $\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p}$.
   En déduire que, pour tout $p \geqslant 1$, $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
2. Établir alors que (w_n) est une suite croissante.
3. Montrer que cette suite converge vers un réel γ tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
   Écrire un programme PYTHON d'argument n qui retourne w_n.
4. Établir que, pour tout $p \geqslant 1$, $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u}\, du$.
5. En déduire que pour tout $p \geqslant 2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$.
6. On pose $r_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{p=n+1}^{N} u_p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.
   (a) Justifier que (r_n) existe.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}$.
   (c) On approche γ par w_n. Expliciter un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2}.
   (d) Écrire un programme PYTHON qui a pour argument *epsilon* et qui renvoie une valeur approchée de γ à *epsilon* près.

Partie II

Formule de James Stirling

D'après la partie I, on sait qu'il existe un réel γ, appelé **constante d'Euler-Mascheroni** telle que, quand n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

On pose de plus : $\forall n \geqslant 2$,

$$x_n = \int_{n-1}^{n} (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2}\, dt,\ y_n = -\ln n + \int_{n-1}^{n} \ln t\, dt.$$

Et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

1. Vérifier que $t \mapsto t\ln t - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln t$.
2. Montrer pour tout n supérieur ou égal à 2,
$$\sum_{k=2}^{n} y_k = n\ln n - n + 1 - \ln(n!).$$
3. Vérifier, en effectuant une intégration par parties, que, pour $n \geqslant 2$:
$$y_n = -\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\frac{1}{t}\, dt.$$
Effectuer de nouveau une intégration par parties et en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$,
$$y_n = -\frac{1}{2n} - \frac{x_n}{2}.$$
4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $x_p \leqslant \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}$.
En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{p=2}^{n} x_p\right)_{n\geqslant 2}$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.
5. Démontrer que, quand n tend vers $+\infty$:
$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\left(1+\gamma+\sum_{k=2}^{n} x_k\right) + o(1).$$
6. En posant $K_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\gamma+\displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k\right)$, vérifier que
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}e^K$$
avec $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = K$, quand $n \to +\infty$.
7. On veut déterminer K dans cette question.
   (a) En remarquant que $\sin^n x = \sin x \sin^{n-1} x$, démontrer par une intégration par parties, que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, relation valable pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Calculer I_0 et I_1 et en déduire que pour $p \in \mathbf{N}$,
   $$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$
   (c) Montrer que $I_{2p}I_{2p+1} \sim \dfrac{\pi}{4p}$ pour $p = +\infty$.
   (d) Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^\star$,
   $$I_n I_{n+1} \leqslant I_n^2 \leqslant I_n I_{n-1}.$$
   En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $n = +\infty$.
   Et montrer, en particulier que si p tend vers $+\infty$, $I_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.
   (e) Vérifier que $I_{2p} \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}e^K}$ au voisinage de $p = +\infty$. En déduire la valeur de e^K.
   (f) En déduire que lorsque $n \to +\infty$, $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
   On appelle ce résultat la **formule de Stirling**.

(g) Écrire une fonction PYTHON $factorial$ d'argument n et qui renvoie $n!$ en partant de la définition $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$ et $0! = 1$. On fera une version itérative et une version récursive.
Écrire alors une fonction PYTHON *compare* d'argument n qui renvoie une liste composée des différences entre $k!$ et son approximation par la formule de Stirling pour k variant de 1 à n.
Déterminer la complexité (en fonction de n) de la fonction $factorial$ dans le cas itératif.
Déterminer de même la complexité de la fonction $factorial$ dans le cas récursif. Dans ce dernier cas, on commencera par montrer que si $T(n)$ est la complexité alors si $n = 0$, $T(0) = 1$ et si $n > 0$, $T(n) = T(n-1) + 2$. On en déduira $T(n)$.

Partie III

Démonstration du théorème de Moivre-Laplace dans un cas particulier. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. ***Générateur aléatoire.***
On note, dans cette question et les suivantes, X une $v.a.r$ de Bernoulli prenant les valeurs -1 et 1 de façon équiprobable, c'est-à-dire que :
$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2}.$$
Démontrer que X est une **v**ariable aléatoire centrée réduite, c'est-à-dire que $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

2. ***Somme d'épreuves élémentaires.***
Soit Y_n la $v.a.r$ égale à la somme de $2n$ $v.a.r$ X **indépendantes**.
   (a) Montrer que Y_n ne prend que les valeurs paires de $[\![-2n, 2n]\!]$.
   (b) Dans le calcul de Y_n, soit R la $v.a.r$ égale au nombre de fois où X vaut 1 et L la $v.a.r$ égale au nombre de fois où X vaut -1.
      i. Que vaut $R+L$? En remarquant que $Y_n = R-L$, en déduire l'expression de Y_n en fonction de R et de n seuls.
      ii. Justifier que la loi de probabilité de R est une loi binomiale dont on donnera les paramètres. En déduire l'espérance $E(R)$ et la variance $V(R)$.
      iii. En déduire $P(Y_n = 2k)$ pour $k \in [\![-n, n]\!]$.
   (c) Montrer que Y_n est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire :
$$\forall\, k \in [\![-n, n]\!],\ P(Y_n = -2k) = P(Y_n = 2k).$$
   (d) Démontrer que Y_n est centrée (c'est-à-dire $E(Y_n) = 0$).
   (e) Calculer la variance $V(Y_n)$ et l'écart-type $\sigma(Y_n)$. La variable Y_n est-elle réduite ?

3. ***Réduction de la variable aléatoire.***
On pose :
$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ Z_n = \frac{Y_n}{\sqrt{2n}}.$$
   (a) Démontrer que Z_n est une variable aléatoire centrée réduite.
   (b) Démontrer que $Z_n(\Omega) = \left\{ z_k = \dfrac{2k}{\sqrt{2n}},\ k \in [\![-n, n]\!] \right\}$.
   (c) En déduire que :
$$\forall\, k \in [\![-n, n]\!],\ P(Z_n = z_k) = \binom{2n}{n+k} 2^{-2n}.$$

4. ***Histogramme*** L'histogramme de Z_n est un diagramme constitué de $2n+1$ bandes jointives centrées sur les valeurs de z_k et dont l'aire est égale à $P(Z_n = z_k)$. La largeur commune de ces bandes est égale à l'espace inter-valeurs de la variable Z_n. C'est l'évolution de ce diagramme lorsque n tend vers $+\infty$ qui va nous amener à la loi normale.
Faire un dessin et démontrer que la hauteur de la bande centrée en z_k est :
$$h(z_k) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \binom{2n}{n+k} 2^{-2n}.$$

5. ***Préparation au passage à la limite***
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (on sait que les Z_n sont symétriques par rapport à O).
   On veut créer une suite (x_n) d'éléments de $Z_n(\Omega)$ convergeant vers x.
   On pose :

$$k_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\, x \right\rfloor \text{ et } x_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\, k_n.$$

   (a) Démontrer que $x_n \in Z_n(\Omega)$ pour tout n assez grand et en appliquant le théorème des Gendarmes que la suite (x_n) tend vers x.

   (b) Montrer que

$$h(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\, \frac{1}{2^{2n}}\, \frac{(2n)!}{(n+k_n)!(n-k_n)!}.$$

   C'est la limite de cette expression qui donnera la densité de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

   (c) Démontrer que la limite du rapport $\dfrac{k_n^2}{n}$ quand n tend vers $+\infty$ est $\dfrac{x^2}{2}$.

   (d) Vérifier que $n + k_n$ et $n - k_n$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

6. ***Calcul de la limite***

   (a) En utilisant la formule de Stirling établie en fin de partie II, montrer, quand n tend vers $+\infty$,

$$h(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{\left(1 - \dfrac{2k_n}{n+k_n}\right)^{k_n}}{\left(1 - \dfrac{k_n^2}{n^2}\right)^{n}}.$$

   (b) Posons :

$$A = \left(1 - \frac{2k_n}{n+k_n}\right)^{k_n} \text{ et } B = \left(1 - \frac{k_n^2}{n^2}\right)^{n}.$$

   En utilisant $\ln(1-u) \sim -u$ quand u tend vers 0, calculer $\ln A$ et $\ln B$ puis leurs limites quand $n \to +\infty$.
   Déterminer enfin la fonction g telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} h(x_n) = g(x).$$

   Conclusion : g est appelée la densité de probabilité de la loi normale $N(0,1)$. On dit que Z_n converge vers $N(0,1)$.