# $\boxed{\text{CONCOURS BLANC BIS 2020. 2TSI}}$

# $\boxed{\text{MODELISATION. Partie math}}$

# $\boxed{\text{CORRECTION}}$

***Ce sujet est une partie du sujet de modélisation CCP TSI session 2015***

Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -10 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. • Calculons et factorisons le polynôme caractéristique $\chi$ de $M$. On pourra remarquer que $\chi(-2) = 0$.

   On écrit :

$$\chi(t) = \mathsf{Det}\,(tI_3 - M) = \begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & t+4 & -1 \\ 10 & 10 & t+2 \end{vmatrix}.$$

   Comme on sait que $-2$ est racine, autant développer, on trouve :

$$\chi(t) = t^3 + 6t^2 + 28t + 40 = (t+2)(t^2 + at + 20).$$

   En développant et en identifiant, $a = 4$ et :

$$\chi(t) = (t+2)(t^2 + 4t + 20).$$

   Ce qui donne enfin :

$$\chi(t) = (t+2)(t - (-2+4i))(t - (-2-4i)).$$

   • La matrice $M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ ? dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ ?

   Le spectre de $M$ est $\{-2, -2+4i, -2-4i\}$ et donc $M$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{R}$ car deux valeurs propres sont complexes non réelles et l'est dans $\mathbf{C}$ car les trois valeurs propres sont distinctes (en dimension 3).

   Dans la suite, on cherche les solutions du ***système différentiel homogène*** (1) ***suivant*** :

$$\frac{dY}{ds}(s) = M\,Y(s),$$

   où l'inconnu est $Y : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$. Pour cela, on considère les deux matrices :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -20 & -10 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

   On note $\overline{Q}$ la matrice dont tous les coefficients sont les conjugués de ceux de $Q$ et $I_3$ est la matrice identité de dimension 3.

2. • Montrons que $R$ est inversible. Le calcul de $R^{-1}$ n'est pas demandé.

   Il suffit de calculer $\mathsf{Det}\,R = 160 \neq 0$.

   •
   Vérifions que $\overline{Q}Q = I_3$. En déduire que $Q$ est inversible et exprimons $Q^{-1}$.

   On calcule :

$$\overline{Q}Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   Comme $Q^{-1}Q = I_3 \Rightarrow Q^{-1} = \overline{Q}$.

   • Montrons que $P = RQ$ est inversible et exprimons $P^{-1}$ en fonction de $R^{-1}$ et $Q^{-1}$.

$RQ$ est inversible comme produit de deux fonctions inversibles et :

$$P^{-1} = (RQ)^{-1} = Q^{-1}R^{-1}.$$

On pose maintenant $D = P^{-1}MP$ et on admet alors que $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2+4i & 0 \\ 0 & 0 & -2-4i \end{pmatrix}$.

Soit ***le système différentiel*** (2) ***suivant d'inconnu*** $Z : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$, $\dfrac{dZ}{ds}(s) = D\,Z(s)$.

3. Soient $Z : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ une fonction vectorielle dérivable et $Y = PZ$.
   Montrons que $Z$ est solution de (2) si et seulement si $Y$ est solution de (1).

   $P$ est donc la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres dans la diagonalisation de $M$ dans $\mathbf{C}$.
   On a :
   $$\frac{dY}{ds}(s) = M\,Y(s) = PDP^{-1}Y(s) = PDP^{-1}PZ(s) = PDZ(s).$$
   Et donc :
   $$\frac{dY}{ds}(s) = PDZ(s) = P\frac{dZ}{ds}(s) \Leftrightarrow \frac{dZ}{ds}(s) = D\,Z(s).$$

4. Montrons que les solutions à valeurs complexes de (2) sont de la forme :
   $$Z(s) = E_2(s)Z_0,$$
   où $Z_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ et :
   $$E_2(s) = e^{-2s}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{4is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4is} \end{pmatrix}.$$
   Posons $Z(s) = \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{pmatrix}$, donc : $\dfrac{dZ}{ds}(s) = \begin{pmatrix} z_1'(s) \\ z_2'(s) \\ z_3'(s) \end{pmatrix}$ et :
   $$\begin{pmatrix} z_1'(s) \\ z_2'(s) \\ z_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2+4i & 0 \\ 0 & 0 & -2-4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{pmatrix}.$$
   Cela donne :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} z_1'(s) & = & -2z_1(s) \\ z_2'(s) & = & (-2+4i)z_2(s) \\ z_3'(s) & = & (-2-4i)z_3(s) \end{array}\right. .$$
   Et donc il existe $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{C}^3$ tel que :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} z_1(s) & = & e^{-2s}k_1 \\ z_2(s) & = & e^{-2s+4is}k_2 \\ z_3(s) & = & e^{-2s-4is}k_3 \end{array}\right. .$$
   Cela se met sous la forme :
   $$Z(s) = e^{-2s}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{4is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4is} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix},$$
   et on pose $Z_0 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$.

   Calculons pour tout $s \in \mathbf{R}$, $E_1(s) = QE_2(s)Q^{-1}$. On a :
   $$E_1(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} e^{-2s}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{4is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4is} \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$E_1(s) = \frac{e^{-2s}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4is} & ie^{-4is} \\ 0 & ie^{4is} & e^{-4is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela s'écrit :

$$E_1(s) = e^{-2s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(4s) & \sin(4s) \\ 0 & -\sin(4s) & \cos(4s) \end{pmatrix} = e^{-2s} V(s).$$

On remarque que $E_1(s)$ est réel et que $V(s)$ est la matrice d'une isométrie vectorielle car $V(s)(V(s))^T = I_3$. De plus, on remarque que $V(s)$ est la matrice d'une rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{i}$ et d'angle $4s$.

5. Montrons que les solutions à valeurs complexes de (1) peuvent s'écrire sous la forme :

$$Y(s) = N(s)Y_0,$$

avec $Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ et, pour tout $s \in \mathbf{R}$, $N(s) = RE_1(s)R^{-1}$.
En effet,

$$Z(s) = E_2(s)Z_0 \Rightarrow Y(s) = PE_2(s)Z_0 \Rightarrow Y(s) = RQE_2(s)Z_0.$$

Or $E_1(s)Q = QE_2(s)$ et :

$$Y(s) = RE_1(s)QZ_0.$$

Puis posons $Y_0 = PZ_0$. Alors : $P^{-1}Y_0 = Z_0$ et $Q^{-1}R^{-1}Y_0 = Z_0$.
Donc :

$$Y(s) = RE_1(s)QQ^{-1}R^{-1}Y_0 = RE_1(s)R^{-1}Y_0.$$

6. Soient $Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ et $Y : s \mapsto N(s)Y_0$.
Montrons que $Y$ est à valeurs réelles si et seulement si $Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
On a : $Y(s) = RE_1(s)R^{-1}Y_0$.
Comme $R \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, $R^{-1}$ aussi et on a vu plus haut que $E_1(s) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ donc :

$$RE_1(s)R^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}).$$

Donc $Y(s) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ si et seulement si $Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
En déduire l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (1).