Déterminants

■ Calcul du déterminant d'une famille de vecteurs ou d'une matrice

Exercice 01

Calculer avec la définition ou avec Sarrus, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+i & 1 & 3 \\ 1-i & -2 & 1 \\ 1+3i & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Exercice 02

En développant selon une rangée, calculer $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

Exercice 03

On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $1 + j + j^2$.
2. En déduire la valeur de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 04

Montrer, sans le développer, que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Starter
Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17.

Exercice 05

Factoriser le déterminant $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$, où $x \in \mathbf{R}$ est fixé.

Starter
Attention, on ne demande pas ici de développer directement et de trouver une racine évidente, bien qu'ici cela fonctionne. On fait des opérations élémentaires qui mettent des polynômes en x en facteur et qui ramènent le déterminant à un déterminant de calcul immédiat. On pourra commencer par : $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

Exercice 06

$(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, on pose $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

1. En utilisant la linárité par rapport à chaque colonne, développer ce déterminant et l'écrire en fonction de $V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.
2. En déduire la forme factorisée de $D(a, b, c)$.

Exercice 07

$(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, écrire sous forme factorisée : $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$.

Starter
On utilisera $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. Attention, il ne s'agit pas de développer directement. On fera des opérations élémentaires.

Exercice 08

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $(n \geqslant 2)$ et pour $p \in [\![2, n]\!]$, on pose :

$$P_{p-1}(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & X \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{p-1}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \cdots & a_{p-1}^{p-1} & X^{p-1} \end{vmatrix}.$$

$V(a_1, a_2, \cdots, a_p) = P_{p-1}(a_p)$ **est le célèbre déterminant de Vandermonde**.

1. S'il existe (i,j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $a_i = a_j$, montrer $V(a_1, \cdots, a_p) = 0$.
2. Si les a_i sont distincts, montrer que $P_{p-1}(X)$ est un polynôme de $\mathbf{R}_{p-1}[X]$, de racines $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ et de coefficient dominant $V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$.
3. En déduire que *dans tous les cas* $V(a_1, a_2, \cdots, a_p) = (a_p - a_1)(a_p - a_2)\dots(a_p - a_{p-1})V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$.
4. Montrer : $\forall n \geqslant 2, \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n : V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.
5. Calculer : **a.** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$, **b.** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix}$, **c.** $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Starter
5. Δ_1 : C'est le déterminant de **l'exercice 07**. Δ_2 : On reconnaitra à un coefficient multiplicatif près $V(a^2, b^2, c^2)$. Δ_3 : Déterminer le coefficient en x^2 de $V(a,b,c,x)$.

Exercice 09

On pose $A = (|i-j|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\Delta = \mathrm{Det} A$.

1. Écrire Δ pour $n = 2$ et $n = 3$.
2. Déterminer Δ dans le cas général.

Starter
2. Par différentes opérations élémentaires, on se ramène à un déterminant triangulaire.
Par exemple, on commence par faire les opérations sur les lignes successives de Δ :
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_2, ..., L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$.
Puis on continue, en faisant des opérations sur les colonnes successives que vous trouvez vous-mêmes !

Exercice 10

On pose $D_1 = a_1$ et pour $n \geqslant 2$, on pose $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, où aucun des réels a_i n'est nul.

1. Calculer D_2.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $D_n = (-1)^{n+1} a_n D_{n-1}$.
3. En déduire D_n pour tout $n \geqslant 1$.

Starter
2. On développera D_n par rapport à la première ligne.

■ Applications du déterminant d'une matrice

Exercice 11

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I_3 = O$.

Starter
On partira de $A^2 = -I_3$ et on passera aux déterminants.

Exercice 12

La famille $((2,1,0), (1,3,1), (5,2,1))$ est-elle libre ? Le montrer en utilisant son déterminant.

Exercice 13

Pour quelles valeurs de a, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer alors A^{-1}.

■ Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 14

En utilisant un déterminant montrer que l'endomorphisme $P \mapsto P + 2P' + P''$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$.

Exercice 15

On pose $\psi\ :\ \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}[X]$, $P \mapsto XP' + P(1)$. Calculer $\mathsf{Det}\,\psi$.

Starter
On vérifie que $\psi \in \mathrm{L}(\mathbf{R}_n[X])$ puis on détermine $M_{\mathcal{B}}(\psi)$, où $\mathcal{B} = \{1, X, ..., X^n\}$.

Exercice 16

Montrer que l'application φ définie sur $\mathbf{R}[X]$ par $\varphi(P)(X) = \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\,dt$ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, que l'on appellera φ_n. Calculer $\mathsf{Det}\,\varphi_n$.