

Séries entières

■ Détermination de rayon de convergence

Exercice 01

Déterminer le rayon de convergence des séries entières (pour $x \in \mathbf{R}$) :

$$\sum_{n \geq 0} \tan\left(n \frac{\pi}{7}\right) x^n, \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n^2 + 1}, \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n \geq 0} n^2 x^n, \\ \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n, \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n, \sum_{n \geq 0} n! x^n$$

Exercice 02

Déterminer le domaine de convergence et étudier la convergence aux bornes ($z \in \mathbf{C}$) pour la série :

$$\sum_{n \geq 0} (1 + in) z^n$$

Exercice 03

Déterminer le domaine de convergence et étudier la convergence aux bornes ($z \in \mathbf{C}$) pour la série :

$$\sum_{n \geq 0} a^{\sqrt{n}} z^n,$$

où a est un réel fixé strictement positif.

Exercice 04

Déterminer le domaine de convergence et étudier la convergence aux bornes ($z \in \mathbf{C}$) pour la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} z^n$$

■ Développement en série entière d'une fonction

Exercice 05

Développer en série entière la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ et préciser le domaine de convergence.

Exercice 06

Développer en série entière la fonction $h : x \mapsto \sin^2 x$ et préciser le domaine de convergence.

Exercice 07

Développer en série entière la fonction $j : x \mapsto \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$ et préciser le domaine de convergence.

Exercice 08

Développer en série entière la fonction $k : x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$ et préciser le domaine de convergence.

Exercice 09

Développement en série entière de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ et de $x \mapsto \int_0^x \sin(t^2) dt$?

■ Détermination de la somme d'une série entière sur son domaine de convergence**Exercice 10**

Déterminer le rayon de convergence puis les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

Exercice 11

Soit la série entière $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1. Trouver son intervalle de convergence.
2. Quelle est la nature de la série pour les valeurs de x aux bornes du domaine de convergence ?
3. On pose

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)},$$

pour $n \geq 2$.

Calculer quand elles existent les sommes $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n''(x)$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n'(x)$.

En déduire $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

Exercice 12

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie par la relation :

$$a_0 = 1, a_1 = 3 \text{ et } \forall n \geq 2, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Trouver son terme général a_n en utilisant le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
2. Calculer la somme $S(x)$ de la série ainsi que son intervalle de convergence.
3. Retrouver $S(x)$ à l'aide de la relation liant a_n , a_{n-1} et a_{n-2} sans expliciter a_n .

Exercice 13

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série de terme général :

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} (2n-1) x^{2n-2}$$

avec $x \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$.

Exercice 14

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série de terme général :

$$t_n(x) = \frac{\exp(n\theta) - \exp(-n\theta)}{2n} x^n,$$

avec $x \in \mathbf{R}, n \geq 1, \theta \in \mathbf{R}_+$ étant fixé.

Exercice 15

Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $P(0)P(-1)P(-2) \neq 0$ et soit $u_n(x) = \frac{P(n)}{n(n+1)(n+2)}x^n$ avec $x \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$.

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{P(n)}{n(n+1)(n+2)}$, en posant

$$P(n) = an^2 + bn + c$$

3. Déterminer $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ à l'intérieur de son domaine de convergence en l'écrivant sous la forme

$$\frac{g(x) \ln(1-x) + h(x)}{x^2},$$

où g et h sont des polynômes de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 16

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série de terme général

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

avec $x \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$.

2. Si l'on note $f(x)$ la somme de cette série à l'intérieur du disque de convergence, déterminer le domaine de validité de continuité de la fonction f .
3. Calculer $f(x)$ pour tout x à l'intérieur du disque de convergence.

On suppose f continue en ± 1 . En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

Exercice 17

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Déterminer le rayon R de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

2. Déterminer $a_n - a_{n-1}$ pour $n \geq 2$ et en déduire une expression simple de $f(x)$.