Equations et systèmes différentiels

■ Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 01

La variation plasmatique C lors d'une intramusculaire de phénol-sulfane-phtaléine satisfait à l'équation :

$$C'(t) + k_2 C(t) = C_0 k_1 e^{-k_1 t},$$

où C_0 est la substance administrée, k_1 et k_2 sont des constantes caractérisant muscles et veines.

1. Calculer $C(t)$ en supposant $k_1 \neq k_2$.
2. Calculer $C(t)$ en supposant $k_1 = k_2$.

Exercice 02

Résoudre le problème de Cauchy : $y'(x) + y(x) = e^x + \sin x$, $y(0) = 0$.

Exercice 03

Résoudre pour $x > 0$, l'équation différentielle : $2xy'(x) - 3y(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 04

Résoudre sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle : $\cos^2(\theta)\,\rho'(\theta) + \cos(2\theta)\rho(\theta) = e^{-2\theta}\tan(\theta)$.

Exercice 05

On note : $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. On considère l'équation différentielle (E_1) :

$$2x(x-1)y'(x) + (2x-1)y(x) = -1$$

définie sur les intervalles I_1, I_2 et I_3. On note (E_0) son équation homogène associée.

1. Montrer que sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3 fixés, l'ensemble des solutions de (E_0) est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
2. Résoudre (E_0) sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3.
3. On rappelle que pour $|x| > 1$, une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est $\ln|x + \sqrt{x^2-1}|$.
   Intégrer (E_1) sur I_1, I_2 et I_3.
4. On cherche des solutions de (E_1) définies sur $]-\infty, 1[$. Pour cela, on considère S, une solution de (E_1) développable en série entière au voisinage de 0. Si $S(x)$ existe, on a l'égalité $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   a. Démontrer l'existence et l'unicité d'une telle solution $S(x)$.
   On pourra déterminer une relation entre a_{n-1} et a_n pour $n \geq 1$.

   b. Quel est le rayon de convergence de $S(x)$?

   c. A l'aide de ce qui précéde, déterminer l'expression sur I_1 et I_2, en utilisant les fonctions circulaires et hyperboliques réciproques, de l'unique solution de (E_1) prolongeable par continuité en 0 dont le développement en série entière au voisinage de 0 est S.

■ Équations différentielles non linéaires d'ordre 1

Exercice 06

Résoudre sur $]-1,1[$, l'équation différentielle : $(1-x^2)y'(x) - 2(1+x)y(x) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{y(x)}$.
(On pourra poser le changement de fonction : $u(x) = \sqrt{y(x)}$ et se ramener à une équation différentielle linéaire.)

Exercice 07

Sur $]0,+\infty[$, on considère l'équation différentielle : $(E) :\ x^4\left(y'(x) + y^2(x)\right) = 1$.

1. Chercher une solution particulière de (E) de la forme $y_0(x) = \dfrac{ax+b}{x^2}$.
2. Poser $y(x) = y_0(x) + \dfrac{1}{z(x)}$ et déterminer l'équation différentielle vérifiée par z.
   Résoudre cette équation et en déduire les solutions de (E).

■ Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

Exercice 08

Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -2\,x_1(t) + 4\,x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -3\,x_1(t) + 5\,x_2(t) \end{array}\right.$.

Exercice 09

Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & 2y_1(x) + 4y_3(x) \\ y_2'(x) & = & 3y_1(x) - 4y_2(x) + 12y_3(x) \\ y_3'(x) & = & y_1(x) - 2y_2(x) + 5y_3(x) \end{array}\right.$, avec la condition initiale $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ et $y_3(0) = -1$.

Exercice 10

1. Résoudre le système différentiel $Y'(x) = A\,Y(x)$:
$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & 5y_1(x) + y_2(x) - y_3(x) \\ y_2'(x) & = & 2y_1(x) + 4y_2(x) - 2y_3(x) \\ y_3'(x) & = & y_1(x) - y_2(x) + 3y_3(x) \end{array}\right.$$
   sans conditions initiales fixées.
2. On reprend A de la question précédente et on considère maintenant le système différentiel :
$$(\mathcal{S}) :\ Y'(x) = AY(x) + B(x)$$
   avec : $B(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ -xe^x \end{pmatrix}$.
   (a) Écrire $B(x)$ sous la forme $xe^xU_1 + e^xU_2$, où U_1 et U_2 sont deux matrices-colonnes à préciser.
   (b) On cherche une solution particulière de ce système de la forme : $Y(x) = xe^xC + e^xD$, où C et D sont deux matrices-colonnes.
   Déterminer deux égalités faisant intervenir C, D, A, U_1 et U_2. En déduire C puis D.
   (c) Écrire la solution générale de $(\mathcal{S})$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système différentiel $\dfrac{dX}{dt} = AX$, où : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : on pourra introduire la base :
$$\{\vec{u}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1\},$$
où $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{u}_1$ est un vecteur propre de A qui sera bien choisi.

■ Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 12

Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + (1-\lambda)y(x) = 0$, où $\lambda \in \mathbf{R}$.
Montrer (en la déterminant) qu'il existe une et une seule solution ϕ_λ telle que $\phi_\lambda(0) = 0$ et $\phi'(0) = 1$.

Exercice 13

Linéariser $x^2 \cos^2 x$ puis résoudre : $y''(x) + y(x) = x \cos^2 x$.
Indication : on pourra chercher une solution particulière qui soit impaire (car le second membre est une fonction impaire).

Exercice 14

Déterminer l'unique solution de : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exercice 15

On considère le système différentiel : $(\mathcal{S})$: $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & -2y(x) - 4z(x) + 1 + 4x \\ z'(x) & = & -y(x) + z(x) + 3x^2/2 \end{array} \right.$.
Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par y seule à partir de $(\mathcal{S})$ et résoudre cette équation. En déduire z.

Exercice 16

Trouver sous forme de série entière l'unique solution de :

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 17

Soit **l'équation de Bessel d'ordre** 0 :

$$(E) : \; xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

1. Trouver sous forme d'un développement en série entière l'unique solution J_0 telle que $J_0(0) = 1$ et $J_0'(0) = 0$.
2. Développer $\cos(x \sin t)$ en série entière de x en l'écrivant sous la forme $\cos(x \sin t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$, où $u_n(t)$ possède dans son expression une puissance de x.
3. On admet l'inversion : $\displaystyle\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi u_n(t)\, dt$.
   En déduire que $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$.
4. Vérifier en utilisant maintenant des dérivations sous le signe somme que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$ vérifie bien (E). Retrouver le fait que $f = J_0$.