Devoir libre 01

2TSI. Mathématiques

A rendre le mercredi 16 Septembre 2020

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 01

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Tracer le graphe de f.
2. Quel est le signe pour tout entier n de $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2}$?
3. Montrer par récurrence que pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
   Indication : on remarquera que f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{n+1}\right[$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = n\,u_n$, $n \geqslant 0$, montrer :
   $$v_{n+1} - v_n = u_n(1 - (n+1)u_n).$$
   En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = n\,u_n$, $n \geqslant 0$, est croissante.
6. Montrer que la suite (v_n) est bornée puis qu'elle admet une limite l appartenant à $]0,1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
7. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que (w_n) converge vers $l(1-l)$.
8. Soit (t_n) une autre suite telle qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ vérifiant que, pour $n \geqslant n_0$, on a
   $$t_{n+1} - t_n \geqslant \frac{a}{n},$$
   où $a > 0$.
   (a) Calculer $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} (t_{k+1} - t_k)$.
   (b) Montrer que $t_{2n} - t_n \geqslant \frac{a}{2}$ pour $n \geqslant n_0$.
   (c) En déduire que (t_n) est divergente.
9. **On suppose que** $l \neq 1$.
   On pose $a = \frac{1}{2}(l(1-l)$. Justifier $0 < a < l(1-l)$.
   Expliquer pourquoi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $w_n > a$.
   En déduire que la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente.
   En déduire la valeur de l.

Exercice 02

Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite. Quel semble être la limite de (u_n) ?
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, est géométrique.
3. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de (u_n).