Korrektur. Devoir libre 01

Exercice 01

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudions les variations de f.
On a : $f'(x) = 1 - 2x$.
Alors f' est positive donc f est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et f' est négative donc f est décroissante sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Par ailleurs $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. On dessinera sans souci la parabole correspondante.

2. Étudions le signe pour tout entier n de $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2}$.
On a :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{-1}{(n+1)^2(n+2)} < 0.$$

3. Montrons par récurrence que pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
Indication : on remarquera que f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{n+1}\right[$.
Il est clair que la proposition est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \in]0,1[$.
On sait que f est croissante sur $[0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, 1]$ et donc est à valeurs dans $[0, 1/4]$. Et de plus $u_1 = f(u_0)$. Donc la proposition est vraie pour $n = 1$.
Supposons qu'elle soit vraie au rang $n \geqslant 1$. Alors f est croissante sur $\left]0, \frac{1}{n+1}\right[\subset \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On a :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \Rightarrow f(0) < f(u_n) < f\left(\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Et donc en usant de la question précédente,

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}.$$

C'est la proposition au rang $n+1$.

4. Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
Il est clair par le théorème des Gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

5. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = n\, u_n$, $n \geqslant 0$, montrons : $v_{n+1} - v_n = u_n(1 - (n+1)u_n)$.

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n = (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n = u_n - (n+1)u_n^2 = u_n(1 - (n+1)u_n).$$

Comme $u_n > 0$ et $u_n \in \left]0, \frac{1}{n+1}\right[$, on a : $1 - (n+1)u_n > 0$.
Ainsi, $v_{n+1} - v_n > 0$.

6. Montrons que la suite (v_n) est bornée.
On a : $0 < u_n < \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 < nu_n < \frac{n}{n+1} \Rightarrow 0 < v_n < 1$.
Comme (v_n) est croissante et est majorée, elle converge vers une limite l appartenant à $]0,1]$ et même à $]v_1, 1]$.

7. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrons que (w_n) converge vers $l(1-l)$.
On a : $w_n = nu_n(1 - (n+1)u_n) = v_n(1 - nu_n - u_n) = v_n(1 - v_n - u_n)$. On fait tendre n vers $+\infty$, w_n tend bien vers $l(1 - l - 0) = l(1-l)$.

8-a Soit (t_n) une autre suite telle qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ vérifiant que, pour $n \geqslant n_0$, $t_{n+1} - t_n \geqslant \frac{a}{n}$, où $a > 0$.

Calculons $\sum_{k=n}^{2n-1}(t_{k+1}-t_k)$.

On a : $\sum_{k=n}^{2n-1}(t_{k+1}-t_k)=\sum_{n}^{2n-1}t_{k+1}-\sum_{k=n}^{2n-1}t_k=\sum_{k=n+1}^{2n}t_k-\sum_{k=n}^{2n-1}t_k$.

On a fait un glissement d'indice dans la première somme. Il reste : $\sum_{k=n}^{2n-1}(t_{k+1}-t_k)=t_{2n}-t_n$.

8-b Montrons que $t_{2n}-t_n\geqslant\dfrac{a}{2}$ pour $n\geqslant n_0$.

On a (car $n\geqslant n_0$) :

$$t_{2n}-t_n=\sum_{n}^{2n-1}(t_{k+1}-t_k)\geqslant\sum_{n}^{2n-1}\frac{a}{k}.$$

Il reste :

$$t_{2n}-t_n=\sum_{n}^{2n-1}(t_{k+1}-t_k)\geqslant\sum_{n}^{2n-1}\frac{a}{2n}=\frac{a}{2}.$$

8-c Déduisons-en que (t_n) est divergente.

Si (t_n) tend vers l_1, alors (t_{2n}) tend vers l_1 aussi comme toute bonne suite extraite qui se respecte. Et :

$$0=l_1-l_1\geqslant\frac{a}{2}>0.$$

ABSURDE!!!

9. On suppose que $l\neq 1$.

• On pose $a=\frac{1}{2}(l(1-l)$. Justifions $0<a<l(1-l)$.

Comme $l\neq 1$, $l(1-l)>0$ car $l\in]0,1]$. Et donc $a>0$ puis $\frac{1}{2}(l(1-l)<l(1-l)$. D'où le résultat.

• Expliquons pourquoi il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $w_n>a$.

Comme (w_n) tend vers $l(1-l)>a>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $w_n>a$.

• Déduisons en que la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente.

Alors pour tout $n\geqslant n_0$, $w_n>a\Rightarrow v_{n+1}-v_n\geqslant\dfrac{a}{n}$.

• Déduisons en la valeur de l.

Alors (v_n) tend forcément vers $+\infty$ et c'est donc absurde. Donc $l=1$ nécessairement et (v_n) tend vers 1.

Exercice 02

Soit la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$.

1. Déterminons les cinq premiers termes de cette suite. Quel semble être la limite de (u_n) ?

On a : $u_1=\sqrt{3}=1.732$, $u_2=1.94$, $u_3=1.984$, $u_4=1.996$, $u_5=1.999$.
La suite (u_n) semble tendre vers 2.

2. Montrons que la suite (v_n) définie par $v_n=u_n^2-4$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, est géométrique.

On a :

$$v_{n+1}=u_{n+1}^2-4=\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2-4=\frac{1}{4}\left(u_n^2+12\right)-4=\frac{1}{4}\left(u_n^2+4\right)=\frac{1}{4}v_n.$$

3. Déduisons en la limite de la suite (v_n) puis celle de (u_n).

Alors (v_n) tend vers 0 et donc u_n tend vers ± 2. Comme $u_n>0$ pour tout n, alors on peut conclure que (u_n) tend vers 2.