Devoir surveillé 01. TSI2

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Samedi 26 septembre 2020

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

Préambule

1. Soit n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. Énoncer le théorème donnant la formule de Taylor-Young, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, au voisinage de a.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de zéro, de la fonction cosinus, en faisant le lien avec la formule de Taylor-Young.

Partie principale

On considère la fonction ϕ qui, à tout réel x, associe :

$$\phi(x) = \frac{12-5x^2}{12+x^2}\ ; \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12+x^2}$$

1. Étudier la parité de la fonction ϕ. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude, et pour sa courbe représentative ?
2. Comparer, pour tout réel x, $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
3. Calculer, pour tout réel x : $\phi'(x)$ (On utilisera les résultats des questions précédentes pour faire le calcul le plus simplement possible).
4. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ (on fera figurer les limites de ϕ aux bornes du domaine d'étude).
5. Écrire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction ϕ.
6. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx 1,71 \text{ et } 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54.$$

   Tracer, sur un même graphique, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?
   Donner, à l'aide de la question précédente, une interprétation.

EXERCICE 02

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x : $h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$. On admettra que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right).$$

3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x) = h\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \cdots \cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x).$$
5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$.
7. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

EXERCICE 03

On considère la fonction $f : \mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par :
$$\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\},\ f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$
On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et on pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Partie A - Lieux de points

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \frac{1}{3}(-3+2i\sqrt{3})$.
Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral (on pourra mettre $f(c)$ sous forme trigonométrique).
2. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
(On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y.)
3. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.
(On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y.)

Partie B - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de ω.
   (b) La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
   (c) Montrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{-1, 0, 1\}$.
2. Dans la suite, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.
   (b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?
   (c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
3. On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C}\setminus\{-1, 0, 1, -i, i\}$, et on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}.$$
D'après la question précédente, la suite (v_n) est bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq -i$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.