2TSI. Devoir libre 02

A rendre le mercredi 07 Octobre 2020

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 01

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\lfloor x+1 \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que la fonction f est périodique de période 1.
3. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0,1[$ et préciser la valeur de $f(1)$.
4. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$.
5. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 02

On rappelle que arccos est la fonction réciproque de $[0,\pi] \to [-1,1]$, $\theta \mapsto \cos(\theta)$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n : x \mapsto \cos(n \arccos(x))$.

1. Préciser le domaine de définition de T_n.
2. Calculer, pour tout x dans le domaine de définition, $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$.
3. Pour tout entier naturel n, calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.
4. Étudier la parité de T_n en fonction de n.
5. Pour tout x dans le domaine de définition, démontrer que : $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.
6. En déduire que T_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
   Pour tout entier naturel n, T_n s'appelle le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.
7. Montrer que T_{n+1} admet $n+1$ racines distinctes dans l'intervalle $[-1,1]$.

   On rappelle qu'après l'exécution de l'instruction Python *import numpy as np*, *np.pi* désigne la constante π et *np.cos* correspond à la fonction cos. La fonction *np.cos* peut s'appliquer à un tableau, elle produit alors un nouveau tableau de même dimension dont les composantes sont les cosinus des composantes du tableau passé en paramètre. Par ailleurs, l'expression *np.linspace*(x, y, n) construit un vecteur de n valeurs, régilièrement espacées, la première valant x et la dernière y.
8. Compléter la fonction Python *Tchebychev*(n) ci-dessous qui prend en argument un entier n et renvoie un couple de deux vecteurs $(u_0, ..., u_{999})$ et $(y_0, ..., y_{999})$ avec pour tout k entier entre 0 et 999, $y_k = T_n(u_k)$.

```
>>> import numpy as np
>>> def Tchebychev(n) :
        T = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 1000)
        U = np.cos(T)
        Y = ...
        return U, Y
```

9. En reliant les points de coordonnées (u_k, y_k) pour deux valeurs du paramètre n, on a obtenu les deux courbes suivantes.
   Pour chacune des deux courbes, préciser, en le justifiant, la valeur utilisée pour le paramètre n.