Korrektur. Devoir libre 02

Exercice 01

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimons $\lfloor x+1 \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
On a : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et en ajoutant 1 de chaque côté : $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2$.
Comme $\lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor x \rfloor + 2$ sont deux entiers consécutifs, la partie entière de $x+1$ est $\lfloor x \rfloor + 1$.
Donc : $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

2. Montrons que la fonction f est périodique de période 1.
Il suffit d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = x+1-\lfloor x+1 \rfloor = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.

3. Exprimons $f(x)$ pour $x \in [0,1[$ et précisons la valeur de $f(1)$.
Pour $x \in [0,1[$, $f(x) = x - 0 = x$. De plus, $f(1) = 1-1 = 0$.

4. Le lecteur représente graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$.
Pour l'aider, on remarque que $f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = 0$ puis pour $x \in]-2,-1[$, $f(x) = x-(-2) = x+2$, pour $x \in]-1,0[$, $f(x) = x-(-1) = x+1$, pour $x \in]0,1[$, $f(x) = x$, pour $x \in]1,2[$, $f(x) = x-1$.

5. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
On remarque que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et en tout point de $\mathbb{Z}$, f est continue à droite et discontinue à gauche.

Exercice 02

1. La fonction cos est définie sur $\mathbf{R}$ et la fonction arccos est définie sur $[-1,1]$. Par composition, la fonction T_n est définie sur $[-1,1]$.

2. Soit $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos(0 \arccos x) = 1 \\
T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x \\
T_2(x) &= \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= \cos(3\arccos x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x
\end{aligned}$$

3. Soit n un entier naturel,,

$$\begin{aligned}
T_n(-1) &= \cos(n \arccos(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n \\
T_n(0) &= \cos(n \arccos(0)) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \Re(\mathrm{i}^n) \\
T_n(1) &= \cos(n \arccos(1)) = \cos(n \times 0) = 1
\end{aligned}$$

4. T_n est définie sur $[-1,1]$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0.
Pour tout réel x de $[-1,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
T_n(-x) &= \cos(n \arccos(-x)) = \cos(n \times (\pi - \arccos(x))) \\
&= \cos(n\pi - n\arccos(x)) \\
&= \begin{cases} \cos(n \arccos(x)) = T_n(x) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -\cos(n\arccos(x)) = -T_n(x) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in [-1,1],\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)}$$

Si n est pair, T_n est paire, si n est impair, T_n est impaire.

5. Soit x un réel de $[-1,1]$ et n un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) \\
&= 2\cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\arccos(x)\right)\cos\left(\frac{n+1-(n-1)}{2}\arccos(x)\right) \\
&= 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\
&= 2xT_n(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [-1,1], T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)}$$

6. On démontre par une récurrence double la propriété $\mathcal{P}_n$: « T_n est un polynôme de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1}», pour n un entier non nul.

— *Initialisation* :
On vérifie la propriété pour les fonctions T_1, T_2, et T_3 déterminés à la question **Q34**.

— *Hérédité* : On suppose, pour un certain entier n non nul, que les propriété $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies. On utilise la relation de récurrence déterminée dans la question **Q37** pour obtenir, pour tout réel $x \in [-1,1]$:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

T_{n+1} et T_n étant des fonctions polynomiales, on en déduit que T_{n+1} est une fonction polynomiale.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, T_{n+1} est une fonction polynomiale, dont le degré est $\deg T_{n+1} = n+1$ et son coefficient dominant est 2^n.
Pour tout polynôme P et Q, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$, on en déduit que $\deg 2XT_{n+1} = n+2$ et le coefficient dominant du polynôme $2XT_{n+1}$ est 2^{n+1}.
Comme $\deg T_n = n-1 < \deg 2XT_{n+1}$, comme $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et que cette inégalité est stricte si $\deg P \neq \deg Q$, on obtient :

$$\boxed{T_{n+2} \text{ est une fonction polynomiale, } \deg T_{n+2} = n+1 \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n+1}}$$

— *Conclusion* : Par cette récurrence double, nous avons montré que pour tout entier n non nul, T_n est une fonction polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^{n-1}

Il reste à préciser que T_0 est une fonction polynomiale de degré 0 et que son coefficient est 1.
Remarque : Comme les fonctions sont polynomiales, on peut étendre leur domaine de définition à $\mathbf{R}$.

7. Soit n un entier , pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) = 0 &\Leftrightarrow (n+1)\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \in \mathbf{Z} \\ &\Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2n+2} + \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbf{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right), k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

On pose $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ avec k entier entre 0 et $n+1$, et $x_k = \cos\theta_k$.
On a alors : $0 < \theta_0 = \frac{\pi}{2n} < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2n+2} < \pi$.
La fonction cos étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$ on a alors :
$-1 < \cos\theta_n < \ldots < \cos\theta_0 < 1 \Leftrightarrow -1 < x_n < \ldots < x_0 < 1$
Nous savons que le polynôme T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Le nombre de racines de ce polynôme est donc majoré par son degré, or, nous avons déterminé $n+1$ racines distinctes, donc l'ensemble de ses racines. En conclusion :

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } T_{n+1} \text{ sont dans } [-1,1] \text{ ce sont les réels : } x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right) \text{ avec } k \in 0, n+1}.$$

8. T est un vecteurs de réels de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sur cet intervalle, $\arccos\cos\theta = \theta$, U est donc un vecteur de réels de $[-1,0]$ et $Y = \cos(nT)$ le vecteur contenant les images des composantes de U par T_n.

```
>>> def Tchebychev(n) :
        T = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 1000)
        U = np.cos(T)
        Y = np.cos(n * T)
        return U, Y
```

9.

— Pour la courbe 1 : La fonction polynomiale vaut -1 en -1 donc n est impair. La fonction polynomiale est donc impaire et T_n admet donc 5 racines, donc ce cas correspond à $n = 5$.

— Pour la courbe 2 : C'est la courbe d'une fonction paire car $T_n(-1) = -1$, ce polynôme admet donc 8 racines, il s'agit donc du cas $n = 8$.