2TSI. DEVOIR LIBRE N°03

A rendre le mercredi 04 Novembre 2020

Le premier exercice est à traiter par tout le monde ainsi que la question 1 du second exercice. Le reste de ce dernier exercice est réservé aux vaillants.

Exercice 01

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Déterminer $A^2 - 2A$.
   (c) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer AU et AV.
   En déduire que si ϕ est l'endomorphisme associé canoniquement à A, et si l'on pose la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1),\ \vec{u}_2 = (1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, alors la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est C.
   Justifier alors l'égalité $P^{-1}AP = C$.
2. (a) Exprimer B en fonction de I_2 et de A. Exprimer de même D en fonction de I_2 et de C.
   (b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner les coefficients de D^n.
   (c) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.
4. Ben et Nuts jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$. On suppose que c'est Ben qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
   Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Ben gagne le $n^{\text{ème}}$ échange » et B_n l'événement « Nuts gagne le $n^{\text{ème}}$ échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
   (a) Donner les valeurs de a_1 et de b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \dfrac{5}{9}$.
   (b) On observe que Ben emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?
   (c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n.$$
   Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n pour $n \geqslant 1$.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier : $X_{n+1} = \dfrac{1}{3}BX_n$.
   (e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $X_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
   (f) Déduire de la question **3-c** que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{3^n+1}{2 \times 3^n}$.
   Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.

T.S.V.P $\rightarrow$

5. Nuts perd la partie et pour oublier, il decide de se souler. Il dispose en face de lui quatre verres de **volumes identiques** de la gauche vers la droite. Il remplit le premier verre à partir de la gauche de limonade et le deuxième verre de vodka pure. Dans le troisième verre, Nuts verse deux tiers du contenu du premier verre et un tiers du contenu du deuxième verre. Il mélange bien le tout. Dans le quatrième verre, Nuts verse tout ce qui reste dans les deux premiers verres et mélange bien le tout. Nuts fait passer les deux premiers verres qui sont alors vides à droite des deux autres verres. Il répète ensuite l'expérience n fois.
   On note V_n le volume de vodka dans le premier verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération et W_n le volume de vodka dans le deuxième verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération.
   On s'intéresse à la proportion de vodka dans chacun de ces verres pleins. On notera v_n la proportion de vodka dans le premier verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération et w_n celle dans le deuxième verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération.
   On posera $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$. On a bien entendu alors $v_1 = \dfrac{1}{3}$ et $w_1 = \dfrac{2}{3}$.
   (a) Calculer v_2 et w_2.
   (b) Trouver une relation entre $\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix}$, la matrice B et $\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$.
   (c) En utilisant les résultats des questions 3 et 4, déterminer la proportion v_n de vodka dans le premier verre plein et la proportion w_n de vodka dans le second verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, pour tout entier $n \geqslant 1$. Faire tendre n vers $+\infty$. Que constate t-on ?

Exercice 02

Ici E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

1. On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \, o \, p = p$.
   (a) Montrer que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
   Indication : on remarque que $\vec{x} = \vec{x} - p(\vec{x}) + p(\vec{x})$ et on montrera que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} p$ et que $p(\vec{x}) \in \operatorname{Im} p$.
   (b) Établir que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(Id - p)$.
   Indication : on montrera $\vec{x} \in \operatorname{Im} p \Rightarrow \vec{x} \in \operatorname{Ker}(Id - p)$ et réciproquement.
   (c) Écrire alors la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe de la question **1** et en déduire que $Rg(p) = Tr(p)$.
2. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$ que si $E_1, ..., E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :
$$\dim(E_1 + ... + E_k) \leqslant \dim E_1 + ... \dim E_k.$$
   Dans la suite k est un entier supérieur ou égal à 2 et on considère des projecteurs de E, notés p_1, p_2, ..., p_k et on pose $q_k = p_1 + p_2 + ... + p_k$.
3. Montrer que pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et k avec $i \neq j$, si l'on a : $p_i \, o \, p_j = \theta$, où θ est l'endomorphisme nul alors q_k est un projecteur.
   On suppose dans la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et k avec $i \neq j$, on a : $p_i \, o \, p_j = \theta$, où θ est l'endomorphisme nul.
4. (a) Montrer que $\operatorname{Im} q_k$ est inclus dans $\operatorname{Im} p_1 + ... + \operatorname{Im} p_k$.
   (b) Etablir, grâce aux résultats de la question 1, que $Rg(q_k) = \dim(\operatorname{Im} p_1 + ... + \operatorname{Im} p_k)$, puis en déduire : $\operatorname{Im} q_k = \operatorname{Im} p_1 + ... + \operatorname{Im} p_k$.
   (c) Etablir finalement : $\operatorname{Im} q_k = \operatorname{Im} p_1 \oplus ... \oplus \operatorname{Im} p_k$.
5. (a) Montrer que pour tout entier j compris entre 1 et k, on a : $q_k \, o \, p_j = p_j$.
   (b) En déduire que pour tout entier j compris entre 1 et k, on a : $\forall x \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1, i \neq j}^{k} p_i(p_j(x)) = 0$.
   (c) Montrer alors que pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et k, avec $i \neq j$, on a : $p_i \, o \, p_j = \theta$.
6. Conclure.