2TSI. DEVOIR LIBRE N°03

CORRECTION

Exercice 01

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1-a Montrons que P est inversible et déterminons son inverse.
On applique GAUβ-Jordan. On concatène P et I_2 puis on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Puis, $L_2 \leftarrow L_2/(-2)$ et ensuite $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

On déconcatène et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}P$.

1-b $A^2 - 2A = O_2$.

1-c On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U \text{ et } AV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.V.$$

Déduisons que si ϕ est l'endomorphisme associé canoniquement à A, et si l'on pose la base

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1),\ \vec{u}_2 = (1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$, alors la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est C.
En effet, $\phi(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1$ et la première colonne de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est $2U$. Puis, comme $\phi(\vec{u}_2) = \vec{0}$ et la seconde colonne de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est la colonne nulle, c'est bien C.
Comme P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a bien l'égalité $P^{-1}AP = C$.

2-a Exprimons B en fonction de I_2 et de A.
On a immédiatement : $B = A + I_2$.
Exprimons de même D en fonction de I_2 et de C.
On a immédiatement : $D = C + I_2$.

2-b Déduisons que $P^{-1}BP = D$.
En effet, $P^{-1}BP = P^{-1}(A + I_2)P = P^{-1}AP + P^{-1}I_2P = C + I_2 = D$.

3-a Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.

- Initialisation : vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Hérédité : On suppose vrai au rang n. On a :

$$D^{n+1} = D^nD = P^{-1}B^nPD = P^{-1}B^nPP^{-1}BP = P^{-1}B^nBP = P^{-1}B^{n+1}P.$$

q.e.d.

3-b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3-c On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

4-a Ben et Nuts jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$. On suppose que c'est Ben qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Ben gagne le $n^{\text{ème}}$ échange » et B_n l'événement « Nuts gagne le $n^{\text{ème}}$ échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
Il est clair que $a_1 = P(A_1) = \dfrac{2}{3}$.
Puis on utilise :

$$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right) \Rightarrow P(A_2) = P_{A_1}(A_2)\, P(A_1) + P_{\overline{A_1}}(A_2)\, P\left(\overline{A_1}\right).$$

Puis $P_{A_1}(A_2) = \dfrac{2}{3}$ est la probabilité que Ben gagne le second échange sachant qu'il a le service car il a gagné le premier échange.
Puis $P_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{1}{3}$ est la probabilité que Ben gagne le second échange sachant qu'il n'a pas le service car il a perdu le premier échange. Il reste :

$$P(A_2) = \frac{2}{3}P(A_1) + \frac{1}{3}P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

4-b On observe que Ben emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?
Il s'agit de calculer $P_{A_2}(A_1)$. On use de la formule :

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{P_{A_1}(A_2)\, P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{2}{5}.$$

4-c On utilise la formule des probabilités totales et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup \left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right) \Rightarrow P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})\, P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\, P\left(\overline{A_n}\right).$$

Puis $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ est la probabilité que Ben gagne léchange numéro $n+1$ sachant qu'il a le service car il a gagné l'échange numéro n.
Puis $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ est la probabilité que Ben gagne l'échange numéro $n+1$ sachant qu'il n'a pas le service car il a perdu l'échange numéro n. Il reste :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P\left(\overline{A_n}\right) = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n.$$

Exprimons de même b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n pour $n \geqslant 1$.
On utilise (encore) la formule des probabilités totales et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$B_{n+1} = (B_{n+1} \cap B_n) \cup \left(B_{n+1} \cap \overline{B_n}\right) \Rightarrow P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})\, P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})\, P\left(\overline{B_n}\right).$$

Puis $P_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ est la probabilité que Nuts gagne léchange numéro $n+1$ sachant qu'il a le service car il a gagné l'échange numéro n.
Puis $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ est la probabilité que Nuts gagne l'échange numéro $n+1$ sachant qu'il n'a pas le service car il a perdu l'échange numéro n. Il reste :

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}P(B_n) + \frac{1}{3}P\left(\overline{B_n}\right) = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n.$$

4-d Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On a immédiatement :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}BX_n.$$

4-e Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $X_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
Initialisation : c'est vrai pour $n = 1$ car $X_1 = I_2 X_1$.

Hérédité : Supposons la formule vraie au rang n. Alors :

$$X_{n+1} = \frac{1}{3} \times B \times \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 = \frac{1}{3^n} B^n X_1.$$

4-f Déduisons de la question **3-c** que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$ et déterminons de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.
On peut écrire que :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1} \times 2} \begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^n \times 2} \begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n \times 2} \begin{pmatrix} 3^n+1 \\ 3^n-1 \end{pmatrix}.$$

On aboutit à :

$$a_n = \frac{3^n+1}{2 \times 3^n} \text{ et } b_n = \frac{3^n - 1}{2 \times 3^n}.$$

5-a Calculons V_2 et W_2.
On a : $V_1 = \dfrac{2}{3}V_0 + \dfrac{1}{3}W_0$ et $W_1 = \dfrac{1}{3}V_0 + \dfrac{2}{3}W_0$. Alors :

$$V_2 = \frac{2}{3}V_1 + \frac{1}{3}W_1 \text{ et } W_2 = \frac{1}{3}V_1 + \frac{2}{3}W_1.$$

Soit :

$$V_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}W_0\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}V_0 + \frac{2}{3}W_0\right).$$

Ou encore :

$$V_2 = \left(\frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) V_0 + \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^2}\right) W_0.$$

La proportion de vodka est donc dans le premier verre rempli :

$$v_2 = \frac{\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^2}}{\dfrac{2^2}{3^2} + \dfrac{1}{3^2}\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^2}} = \frac{4}{9}.$$

De même,

$$W_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}W_0\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}V_0 + \frac{2}{3}W_0\right).$$

Ou encore :

$$W_2 = \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^2}\right) V_0 + \left(\frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) W_0.$$

La proportion de vodka est donc dans le deuxième verre rempli :

$$w_2 = \frac{\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{2^2}{3^2}}{\dfrac{2^2}{3^2} + \dfrac{1}{3^2}\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^2}} = \frac{5}{9}.$$

5-b Comme $\begin{cases} V_n & = & \dfrac{2}{3}V_{n-1} + \dfrac{1}{3}W_{n-1} \\ W_n & = & \dfrac{1}{3}V_{n-1} + \dfrac{2}{3}W_{n-1} \end{cases}$, la relation entre la matrice colonne $\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix}$, la matrice B et la matrice colonne $\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$ est pour $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}B\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$.

5-c En utilisant les résultats des questions 3 et 4, déterminons la proportion de vodka dans le premier verre plein. On a :

$$V_n = \frac{1+3^n}{3^n \times 2} V_0 + \frac{3^n - 1}{3^n \times 2} W_0.$$

La proportion est :

$$\frac{\dfrac{3^n - 1}{3^n \times 2}}{\dfrac{1+3^n}{3^n \times 2} \dfrac{3^n - 1}{3^n \times 2}} = \frac{3^n - 1}{3^n \times 2}.$$

De même, la proportion de vodka dans le second verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, pour tout entier $n \geqslant 1$ est :

$$\frac{\dfrac{3^n + 1}{3^n \times 2}}{\dfrac{1+3^n}{3^n \times 2} \dfrac{3^n - 1}{3^n \times 2}} = \frac{3^n + 1}{3^n \times 2}.$$

Quand on fait tendre n vers $+\infty$, on constate que ces deux proportions tendent vers $1/2$.

Exercice 02

Ici E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

1-a On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p\,o\,p = p$. Montrons que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

On remarque que tout vecteur $\vec{x}$ s'écrit dans E, $\vec{x} = \vec{x} - p(\vec{x}) + p(\vec{x})$.
Puis $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p^2(\vec{x}) = 0$ et donc $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} p$.
De même, par construction, $p(\vec{x}) \in \operatorname{Im} p$. Ainsi, $E \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$.
Comme $\operatorname{Ker} p \subset E$ et $\operatorname{Im} p \subset E$, $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p \subset E$.
Ainsi, $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$.
Montrons que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{\vec{0}\}$.
Prenons $\vec{t} \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, alors $p(\vec{t}) = \vec{0}$ et il existe $\vec{x} \in E$, $p(\vec{x}) = \vec{t}$. Et donc :

$$p(\vec{t}) = p^2(\vec{x}) = p(\vec{x}) = \vec{0} = \vec{t}.$$

On a bien : $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

1-b Établissons que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(Id - p)$.
Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$, alors il existe $\vec{y} \in E$ tel que $p(\vec{y}) = \vec{x}$. Puis

$$p(\vec{x}) = p^2(\vec{y}) = p(\vec{y}) = \vec{x} \Rightarrow \vec{x} - p(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \operatorname{Ker}(Id - p).$$

Réciproquement, si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(Id - p)$, alors $\vec{x} = p(\vec{x}) \in \operatorname{Im} p$.

1-c La matrice de p dans une base adaptée à la somme directe de la question **1** est une matrice diagonale ayant pour commencer $\dim \operatorname{Ker} p$ zéros sur la diagonale principale puis $\dim \operatorname{Im} p$ chiffres 1 toujours sur cette diagonale principale.
Comme $Tr(p)$ est le nombre de 1, soit $\dim \operatorname{Im} p$, on a bien :

$$Rg(p) = Tr(p).$$

2 Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$ que si $E_1, ..., E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$\dim(E_1 + ... + E_k) \leqslant \dim E_1 + ... \dim E_k.$$

• Initialisation : Evident pour $k = 1$ et pour $k = 2$, on écrit :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) \leqslant \dim E_1 + \dim E_2.$$

• Hérédité : Supposons le résultat vrai jusqu'à $k \geqslant 2$ donné,

$$\mathsf{dim}\,(E_1 + ... + E_k + E_{k+1}) = \mathsf{dim}\,((E_1 + ... + E_k) + E_{k+1}) \leqslant \mathsf{dim}\,(E_1 + ... + E_k) + \mathsf{dim}\,E_{k+1}$$

$$\leqslant \mathsf{dim}\,E_1 + ... + \mathsf{dim}\,E_k + \mathsf{dim}\,E_{k+1}.$$

Dans la suite k est un entier supérieur ou égal à 2 et on considère des projecteurs de E, notés p_1, p_2, ..., p_k et on pose $q_k = p_1 + p_2 + ... + p_k$.

3 Montrons que pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et k avec $i \neq j$, si l'on a : $p_i\, o\, p_j = \theta$, où θ est l'endomorphisme nul alors q_k est un projecteur.

On écrit :

$$q_k\, o\, q_k = (p_1 + p_2 + ... + p_k)\, o\, (p_1 + p_2 + ... + p_k) = p_1^2 + ... + p_k^2 = p_1 + ... + p_k.$$

Et donc q_k est un projecteur.

On suppose dans la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et k avec $i \neq j$, on a : $p_i\, o\, p_j = \theta$, où θ est l'endomorphisme nul.

4-a Montrons que $\mathrm{Im}\, q_k$ est inclus dans $\mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k$.

Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, q_k$ alors il existe $\vec{t} \in E$ tel que $\vec{x} = q_k(\vec{t}) = (p_1 + ... + p_k)(\vec{t}) = p_1(\vec{t}) + ... + p_k(\vec{t})$.
Comme $p_1(\vec{t}) \subset \mathrm{Im}\, p_1$, ..., $p_k(\vec{t}) \subset \mathrm{Im}\, p_k$. Donc : $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k$.

4-b Etablissons, grâce aux résultats de la question 1, que $Rg(q_k) = \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k)$.

En effet,

$$Rg(q_k) = Tr(q_k) = Tr(p_1 + ... + p_k) = Tr(p_1) + ... + Tr(p_k) = Rg(p_1) + ... + Rg(p_k)$$

$$= \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, p_1) + ... + \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, p_k).$$

D'après 4-a, $\mathrm{Im}\, q_k \subset \mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k \Rightarrow Rg(q_k) \leqslant \mathsf{dim}\ (\mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k)$.
D'après la question 2,

$$Rg(q_k) \leqslant \mathsf{dim}\ (\mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k) \leqslant \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, p_1) + ... + \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, p_k) = Rg(q_k).$$

Ainsi, $Rg(q_k) = \mathsf{dim}\ (\mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k) = \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, q_k)$.
Et comme $\mathrm{Im}\, q_k \subset \mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k$, $\mathrm{Im}\, q_k = \mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k$.

4-c Établissons finalement : $\mathrm{Im}\, q_k = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_k$.

Partons de ce qui prècéde, $\mathsf{dim}\,\mathrm{Im}\, q_k = \mathsf{dim}\ (\mathrm{Im}\, p_1 + ... + \mathrm{Im}\, p_k) = \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, p_1) + ... + \mathsf{dim}\,(\mathrm{Im}\, p_k)$.
Ce qui implique que les sous-espaces $\mathrm{Im}\, p_1$, ... , $\mathrm{Im}\, p_k$ sont en somme directe.

Warnung : on sait qu'il ne suffit pas de vérifier que pour tout couple d'entiers (l, m) avec $l \neq m$, $\mathrm{Im}\, p_l \cap \mathrm{Im}\, p_m = \{\vec{0}\}$. D'ailleurs, on ne peut pas le vérifier directement.

5-a Montrons que pour tout entier j compris entre 1 et k, on a : $q_k\, o\, p_j = p_j$.

Comme $\mathrm{Im}\, q_k = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_k$, $\mathrm{Im}\, p_j \subset \mathrm{Im}\, q_k$ pour tout entier j entre 1 et q. Donc pour tout $\vec{x} \in E$, $p_j(\vec{x}) \in \mathrm{Im}\, p_j$ est invariant par q_k et : $q_k(p_j(\vec{x}) = p_j(\vec{x})$.

5-b Déduisons en que pour tout entier j compris entre 1 et k, on a : $\forall x \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(x)) = 0$.

Pour tout $\vec{x} \in E$, $((p_1 + ... + p_j + ... + p_k)\, o\, p_j)(\vec{x}) = p_j(\vec{x})$.

Et donc : $\displaystyle\sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(\vec{x})) + p_j^2(\vec{x}) = p_j(\vec{x}) \Rightarrow \sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(\vec{x})) = \vec{0}$ car $p_j^2(\vec{x}) = p_j(\vec{j})$.

5-c Montrons alors que pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et k, avec $i \neq j$, on a : $p_i\, o\, p_j = \theta$.

Comme $\vec{0} \in \mathrm{Im}\, q_k$ alors comme $\mathrm{Im}\, q_k = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_k$, le vecteur $\vec{0}$ s'écrit de façon unique comme somme de vecteurs de $\mathrm{Im}\, p_i$ avec i variant de 1 à k. Et comme $\vec{0} \in \mathrm{Im}\, p_i$ et comme $\vec{0}$ est la somme de $\vec{0}$ la somme allant de 1 à k, alors :

$$\vec{0} = \sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(\vec{x})) \Rightarrow p_i(p_j(\vec{x})) = \vec{0}.$$

6 q_k est un projecteur si et seulement si pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, $p_i\, o\, p_j = \theta$.