Exercices preparation DS 02

Exercice 01

Trois coffres, notés A_1, A_2 et A_3 ont chacun 2 tiroirs et dans chaque tiroir, il y a une pièce de monnaie. Les deux pièces du coffre A_1 sont des Louis d'or, les deux pièces du coffre A_2 sont des Talers en argent et les deux pièces de A_3 sont un Louis d'or et un Taler en Argent.
On rappelle que la notation $P_A(B)$ désigne la probabilité conditionnelle d'avoir B sachant A.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on observe une pièce.
   On note pour tout entier $i \in [\![1, 3]\!]$, l'événement A_i : « le tiroir ouvert appartient au coffre A_i. »
   On note E l'événement : « la pièce observée est un Taler en argent. »
   (a) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.
   (b) Calculer chacune des probabilités conditionnelles $P_{A_i}(E)$ c'est-à-dire la probabilité d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_i.
   (c) Calculer la probabilité d'observer un Taler, c'est-à-dire $P(E)$.
   (d) Calculer la probabilité que l'on a observé une pièce de A_2 sachant que c'est un Taler d'argent.
2. On ouvre de nouveau et indépendamment de la première fois l'un des six tiroirs et on observe encore une pièce. On note, pour tout couple d'entiers $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, F_{ij} l'événement : « le premier tiroir ouvert appartient à A_i et le second à A_j. »
   Enfin, G est l'événement : « on a observé deux fois des Talers d'argent. »
   (a) Justifier que $P(F_{ij}) = \dfrac{1}{9}$.
   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{F_{ij}}(G)$.
   (c) En déduire la probabilité d'avoir observé deux fois des Talers d'argent.

Indications : certaines questions sont très simples car c'est dans l'énoncé et pour d'autres, il faut utiliser la formule des probabilités totales (calcul de $P(E)$ par exemple) et formule de Thomas Bayes (calcul de $P_E(A_2)$ par exemple).

Exercice 02

On donne une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On pourra poser $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. On note A_n l'événement : « S_n est paire » et $U_n = P(A_n)$.
   Calculer U_1, U_2 et U_3.
3. Montrer que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p$ puis que $U_{n+1} = (1 - 2p)U_n + p$.
4. Trouver une relation de récurrence vérifié e par $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ et donner la limite de (U_n).

Indications :
1. C'est du cours.
2. $U_1 = P(X_1$ est paire $)$, U_2 est $P(X_1 + X_2$ est paire $)$ et se décompose en $P(X_1 = 0, X_2 = 0)$ et $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Pour U_3, on a la somme de quatre probabilités.
3. Après le calcul de $P_{A_n}(A_{n+1})$, on calculera de même $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ puis pour calculer u_{n+1}, on appliquera la formule des probabilités totales.
4. On verra que (V_n) est une suite géométrique de raison $1 - 2p$.