Exercices preparation DS 02

Exercice 01

Trois coffres, notés A_1, A_2 et A_3 ont chacun 2 tiroirs et dans chaque tiroir, il y a une pièce de monnaie. Les deux pièces du coffre A_1 sont des Louis d'or, les deux pièces du coffre A_2 sont des Talers en argent et les deux pièces de A_3 sont un Louis d'or et un Taler en Argent.
On rappelle que la notation $P_A(B)$ désigne la probabilité conditionnelle d'avoir B sachant A.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on observe une pièce.
   On note pour tout entier $i \in [\![1, 3]\!]$, l'événement A_i : « le tiroir ouvert appartient au coffre A_i. »
   On note E l'événement : « la pièce observée est un Taler en argent. »

   (a) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.

   (b) Calculer chacune des probabilités conditionnelles $P_{A_i}(E)$ c'est-à-dire la probabilité d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_i.

   (c) Calculer la probabilité d'observer un Taler, c'est-à-dire $P(E)$.

   (d) Calculer la probabilité que l'on a observé une pièce de A_2 sachant que c'est un Taler d'argent.

2. On ouvre de nouveau et indépendamment de la première fois l'un des six tiroirs et on observe encore une pièce. On note, pour tout couple d'entiers $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, F_{ij} l'événement : « le premier tiroir ouvert appartient à A_i et le second à A_j. »
   Enfin, G est l'événement : « on a observé deux fois des Talers d'argent. »

   (a) Justifier que $P(F_{ij}) = \dfrac{1}{9}$.

   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{F_{ij}}(G)$.

   (c) En déduire la probabilité d'avoir observé deux fois des Talers d'argent.

Indications : certaines questions sont très simples car c'est dans l'énoncé et pour d'autres, il faut utiliser la formule des probabilités totales (calcul de $P(E)$ par exemple) et formule de Thomas Bayes (calcul de $P_E(A_2)$ par exemple).

Exercice 02

On donne une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On pourra poser $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. On note A_n l'événement : « S_n est paire » et $U_n = P(A_n)$.
   Calculer U_1, U_2 et U_3.
3. Montrer que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p$ puis que $U_{n+1} = (1 - 2p)U_n + p$.
4. Trouver une relation de récurrence vérifié e par $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ et donner la limite de (U_n).

Indications :
1. C'est du cours.
2. $U_1 = P(X_1 \text{ est paire })$, U_2 est $P(X_1 + X_2 \text{ est paire })$ et se décompose en $P(X_1 = 0, X_2 = 0)$ et $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Pour U_3, on a la somme de quatre probabilités.
3. Après le calcul de $P_{A_n}(A_{n+1})$, on calculera de même $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ puis pour calculer u_{n+1}, on appliquera la formule des probabilités totales.
4. On verra que (V_n) est une suite géométrique de raison $1 - 2p$.

Correction

Exercice 01

Trois coffres, notés A_1, A_2 et A_3 ont chacun 2 tiroirs et dans chaque tiroir, il y a une pièce de monnaie. Les deux pièces du coffre A_1 sont des Louis d'or, les deux pi`eces du coffre A_2 sont des Talers en argent et les deux pièces de A_3 sont un Louis d'or et un Taler en Argent.

1-a On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on observe une pièce.
On note pour tout entier $i \in [\![1,3]\!]$, l'événement A_i : ≪ le tiroir ouvert appartient au coffre A_i. ≫
On note E l'événement : ≪ la pièce observée est un Taler en argent. ≫ Alors :

$$P(A_i) = \frac{1}{3} \text{ pour tout } i \in [\![1,3]\!].$$

1-b La probabilité $P_{A_1}(E)$ d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_1 est 0.
La probabilité $P_{A_2}(E)$ d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_2 est 1.
La probabilité $P_{A_3}(E)$ d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_3 est $\frac{1}{2}$.

1-c La probabilité de prendre un Taler, c'est-à-dire $P(E)$ est, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(E) = P_{A_1}(E)P(A_1) + P_{A_2}(E)P(A_2) + P_{A_3}(E)P(A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

1-d Calculons la probabilité que l'on a observé une pièce de A_2 sachant que c'est un Taler d'argent, c'est-à-dire $P_E(A_2)$. On utilise la formule de Thomas Bayes :

$$P_E(A_2) = \frac{P_{A_2}(E)P(A_2)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

2-a On ouvre de nouveau et indépendamment de la première fois l'un des six tiroirs et on observe encore la première pièce sur laquelle on tombe. On note, pour tout couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, F_{ij} l'événement : ≪ le premier tiroir ouvert appartient à A_i et le second à A_j. ≫
Enfin, G est l'événement : ≪ on a observé deux fois des Talers d'argent. ≫
F_{ij} signifie que l'on a ouvert le coffre A_i avec une probabilité de $1/3$ et ensuite le coffre A_j, toujours avec une probabilité de $1/3$ et de façon indépendante. On en déduit que :

$$P(F_{ij}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

2-b Calculons les probabilités conditionnelles $P_{F_{ij}}(G)$.
On peut remarquer que $P_{F_{ij}}(G) = P_{A_i}(E)P_{A_j}(E)$ car il y a indépendance. Donc :

$$P_{F_{ij}}(G) = 0 \text{ si } i \text{ ou } j \text{ vaut } 1.$$

$$P_{F_{22}}(G) = 1,\ P_{F_{23}}(G) = P_{F_{32}}(G) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } P_{F_{33}}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2-c La probabilité d'avoir observé deux fois des Talers d'argent, c'est-à-dire $P(G)$ est encore, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Exercice 02

On donne une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On pourra poser $q = 1 - p$.

1. Déterminons la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

D'après le cours, comme les v.a.r X_i sont indépendants et suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p. On écrit :

$$S_n \hookleftarrow \mathcal{B}(n,p).$$

2. On note A_n l'événement : « S_n est paire » et $U_n = P(A_n)$.
Calculons U_1, U_2 et U_3.

• On écrit :

$$U_1 = P(X_1 \text{ est paire }) = P(X_1 = 0) = q.$$

• U_2 est $P(X_1 + X_2$ est paire $)$ et se décompose en (car X_1 et X_2 indépendants) :

$$P(U_2) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = q^2 + p^2.$$

• Pour U_3, on a la somme de quatre probabilités. En effet, $[X_1 + X_2 + X_3$ est paire $]$ signifie :

$$(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0).$$

Finalement :

$$P(U_3) = q^3 + qp^2 + qp^2 + qp^2 = q^3 + 3qp^2.$$

3. • Montrons que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p$.
On remarque que $P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité que X_{n+1} soit paire.
En effet, c'est la probabilité que $S_n + X_{n+1}$ est paire sachant que S_n l'est. Donc X_{n+1} est paire. Alors :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = q = 1 - p.$$

• Montrons que $U_{n+1} = (1 - 2p)U_n + p$.
On commence par calculer de même $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. C'est la probabilité que $S_n + X_{n+1}$ est paire sachant que S_n est impaire. Donc X_{n+1} est impaire. Alors :

$$P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = p.$$

Pour calculer u_{n+1}, on applique la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n}).$$

Cela donne :

$$u_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1})u_n + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})(1 - u_n).$$

Et donc :

$$u_{n+1} = qu_n + p(1 - u_n) = (1 - 2p)u_n + p.$$

4. Trouvons une relation de récurrence vérifiée par $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ et donnons la limite de (U_n).
On a : $u_{n+1} = (1 - 2p)u_n + p \Rightarrow \dfrac{1}{2} + V_{n+1} = (1 - 2p)\left(\dfrac{1}{2} + V_n\right) + p.$
Cela donne : $V_{n+1} = (1 - 2p)V_n$. On voit que (V_n) est une suite géométrique de raison $1 - 2p$.
Cela donne : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $V_n = (1 - 2p)^{n-1}V_1$. Puis $V_1 = U_1 - \dfrac{1}{2} = q - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - p$. Il reste :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ V_n = (1 - 2p)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - p\right).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ U_n = \frac{1}{2} + (1 - 2p)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - p\right).$$

Si n tend vers $+\infty$, comme $-1 < 1 - 2p < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty}(1 - 2p)^{n-1} = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{2}.$$