Devoir surveillé 02

2TSI. Mathématiques

Durée 4 heures. Les calculatrices sont interdites.
Les deux exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Samedi 14 Novembre 2020

EXERCICE 01

On utilisera Python pour établir les fonctions

On considère la fonction *mystere* suivante :

```
>>> def mystere(n, b) : """ Données : n > 0 un entier et b > 0 un entier """
        t = [ ]
        while n > 0 :
            c = n % b ; t.append(c) ; n = n // b
        return t
```

Pour $k \in \mathbf{N}^{\star}$, on note c_k, t_k et n_k les valeurs prises par les variables c, t et n à la sortie de la $k^{\text{ème}}$ itération de la boucle *while*.

1. Quelle valeur est renvoyée lorsqu'on exécute $mystere(256, 10)$?
2. Soit $n > 0$ un entier. On exécute $mystere(n, 10)$. On pose $n_0 = n$.
   (a) Justifier la terminaison de la boucle *while*.
   (b) On note p le nombre d'itérations lors de l'exécution de $mystere(n, 10)$. Justifier que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on a : $n_k \leqslant \dfrac{n}{10^k}$. En déduire une majoration de p en fonction de n.
3. En s'aidant du script de *mystere*, écrire *somme_chiffres* qui prend en argument un entier naturel et renvoie la somme de ses chiffres. Par exemple, $somme\_chiffres(256)$ renvoye 13.
4. Écrire une version récursive de la fonction *somme_chiffres*, on la nommera *somme_rec*.

EXERCICE 02

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles pour lesquelles on suppose que la loi du couple (X, Y) est donné par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

1. Donner la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi du couple (X, Y).
2. Reconnaître les lois marginales de X et de Y. En déduire les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.
3. (a) Calculer $E(XY)$ puis la covariance $\operatorname{Cov}(X, Y)$ de X et de Y.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

PROBLEME

L'idée du problème est de considérer un certain nombre d'urnes et on veut disposer un autre certain nombre de jetons dans ces urnes. On se demande combien d'urnes restent vides. C'est ce que l'on appelle aussi le problème des tiroirs. On s'intéressera ici seulement au cas où l'on dispose de 5 jetons. Dans la partie **I**, on prend le cas de 2 urnes et dans les autres parties, on prend le cas de 3 urnes.
La partie **I** est indépendante des autres parties.

Partie I. Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4, 5$ et de deux urnes a et b.
Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi le jeton 1 a une chance sur deux de se retrouver dans l'urne a et une chance sur deux de se retrouver dans l'urne b. Il en est de même pour les quatre autres jetons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne a.

1. Reconnaître le loi de X.
2. Exprimer, à l'aide de X, l'événement : « L'urne a est vide ». Faire de même avec l'événement : « L'urne b est vide ».
3. En déduire la probabilité de l'événement : « L'une des deux urnes est vide ».

On aborde maintenant le cas central de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4, 5$ et de **trois** urnes appelées a, b et c.
De même que précédemment, chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne a, une chance sur trois d'être dans l'urne b et une chance sur trois d'être dans l'urne c.

Partie II. Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit E_i l'événement « le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donner la probabilité de l'événement contraire $\overline{E_i}$ puis celle de E_i.
2. Soit V_a l'événement : « l'urne a est vide ». Exprimer V_a en fonction des événements E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5.
3. En déduire que $P(V_a) = \dfrac{2^5}{3^5}$.
   En notant V_b l'événement : « l'urne b est vide » et V_c l'événement : « l'urne c est vide », par symétrie du problème, on pourra admettre que $P(V_b)$ et $P(V_c)$ ont aussi cette même valeur.

On note désormais N la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de N.

Partie III. Calcul de $P(N = 2)$ et $P(N = 3)$.

1. Que signifie en français l'événement $(N = 3)$? Donner sa probabilité. *On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.*
2. Que signifie en français l'événement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$? Calculer alors $P\left(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c\right)$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $(N = 2)$. On exprimera dans un premier temps l'événement $(N = 2)$ en fonction d'événements tels que $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$ et d'autres du même genre.

Partie IV. Espérance de N

1. On note Z_a la variable aléatoire égale à 1 si V_a est réalisé et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé et 0 sinon) et Z_c (Z_c vaut 1 si V_c est réalisé et 0 sinon).
   Reconnaître la loi de Z_a, de Z_b et de Z_c. Donner les espérances $E(Z_a)$, $E(Z_b)$ et $E(Z_c)$.
2. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimer N en fonction de Z_a, Z_b et Z_c.
3. Calculer alors l'espérance de N.

Partie V. Détermination de la loi de N

1. Montrer que $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \dfrac{2^5}{3^4}$.
2. En déduire la valeur du réel $P(N = 1)$.
3. Donner enfin la loi de la variable aléatoire N.