Devoir surveillé 02. KORREKTUR

EXERCICE 01

On utilisera Python pour établir les fonctions

On considère la fonction *mystere* suivante :

$>>>$ $def\ mystere(n,\, b)$: """ Données : $n > 0$ un entier et $b > 0$ un entier """
 $t\ = [\,]$
 $while\ n\ >\ 0$:
  $c\ =\ n\,\%\,b\,;\ t.append(c)\,;\ n\ =\ n\,//\,b$
 $return\ t$

Pour $k \in \mathbf{N}^{\star}$, on note c_k, t_k et n_k les valeurs prises par les variables c, t et n à la sortie de la $k^{\text{ème}}$ itération de la boucle *while*.

1. Lorsqu'on exécute $mystere(256, 10)$, pour $k = 1$, $c_1 = 6$, $t_1 = [6]$ et $n_1 = 25$ puis pour $k = 2$, $c_2 = 5$, $t_2 = [6, 5]$ et $n_2 = 2$. Enfin pour $k = 3$, $c_3 = 2$, $t_3 = [6, 5, 2]$ et $n_3 = 0$. Donc on renvoie $[6, 5, 2]$.

2-a. Soit $n > 0$ un entier. On exécute $mystere(n, 10)$. On pose $n_0 = n$.
Si l'algorithme boucle indéfiniment alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a : $n_k > 0$.
De plus : $n_{k+1} \leqslant \frac{n_k}{10} < n_k$. La suite (n_k) serait une suite d'entiers naturels strictement décroissante. C'est impossible.

2-b. On note p le nombre d'itérations lors de l'exécution de $mystere(n, 10)$. Alors $n_{p-1} \geqslant 1$. À chaque itération, la valeur de la variable n est au moins divisée par 10, donc, par récurrence immédiate, $n_{p-1} \leqslant \dfrac{n_0}{10^{p-1}} = \dfrac{n}{10^{p-1}}$. On a :

$$\frac{n}{10^{p-1}} \geqslant 1 \Rightarrow 10^{p-1} \leqslant 1 \Rightarrow p - 1 \leqslant \log n \Rightarrow p \leqslant \log n + 1.$$

(*log* est le logarithme décimal.) Le nombre d'itérations est majoré par $\lfloor \log n \rfloor + 1$.

3. On tape (On peut reprendre la question en utilisant *mystere* comme sous-procédure, c'est-à-dire, en appelant $mystere(n, 10)$ dans le corps de la procédure $somme\_chiffres(n)$) :

$>>>$ $def\ somme\_chiffre(n)$:
 $s\ =\ 0$
 $while\ n\ >\ 0$:
  $c\ =\ n\,\%\,10\,;\ s\ =\ s\ +\ c\,;\ n\ =\ n\,//\,10$
 $return\ s$

4. Écrivons une version récursive de $somme\_chiffres$: $somme\_rec$.

$>>>$ $def\ somme\_rec(n)$:
 $if\ n\ <=\ 9$:
  $return\ n$
 $else$:
  $return(somme\_rec(n//10)\ +\ n\,\%\,10)$

EXERCICE 02

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles pour lesquelles on suppose que la loi du couple (X, Y) est donné par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

1. Donnons la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi du couple (X, Y).

La somme de toutes les probabilités doit faire 1 et donc :

$$3(2\beta + 3\beta + 3\beta) = 1 \Rightarrow 24\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{24}.$$

2. Déterminons les lois marginales de X et de Y.

Le mieux est de reprendre le tableau avec la bonne valeur de β et de sommer les lignes et les colonnes pour avoir les lois marginales.

$X \backslash Y$	1	2	3	loi de X
1	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{3}$
loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Déduisons en les espérances $E(X)$ et $E(Y)$. On a :

$$E(X) = E(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2.$$

3-a. Calculons $E(XY)$ puis la covariance $\text{Cov}\,(X, Y)$ de X et de Y.

On a :

$$E(XY) = 1\times1\times\frac{2}{24}+1\times2\times\frac{3}{24}+1\times3\times\frac{3}{24}+2\times1\times\frac{3}{24}+2\times2\times\frac{2}{24}+2\times3\times\frac{3}{24}+3\times1\times\frac{3}{24}+3\times2\times\frac{3}{24}+3\times3\times\frac{2}{24}.$$

Cela donne $E(XY) = \frac{94}{24} = \frac{47}{12}$. Finalement :

$$\text{Cov}\,(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{47}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{1}{12}.$$

3-b Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car $\text{Cov}\,(X, Y) \neq 0$. C'est la contraposée de l'implication vue en cours :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \text{Cov}\,(X, Y) = 0.$$

PROBLEME

Partie I. Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

1. Reconnaîssons le loi de X.

On a déjà $X(\Omega)$ est l'ensemble des entiers compris entre 0 et 5.

• $(X = 0)$ signifie que les cinq jetons sont dans l'urne b. Le nombre de cas possibles est le nombre d'applications d'un ensemble de 5 élements dans un ensemble de 2 éléments soit 2^5.

Il y a un seul cas favorable et donc $P(X = 0) = \frac{1}{2^5}$.

• $(X = 1)$ signifie qu'un jeton est dans l'urne a et les autres dans l'urne b.

Il y a now 5 cas favorables (choix du jeton dans l'urne a). Donc $P(X = 1) = \frac{5}{2^5}$.

• $(X = 2)$ signifie que deux jetons sont dans l'urne a et les autres dans l'urne b.

Il y a now $\binom{5}{2}$ cas favorables (choix des deux jetons dans l'urne a). Donc $P(X=2) = \dfrac{\binom{5}{2}}{2^5} = \dfrac{10}{2^5}$.

• $(X = 3)$ signifie que trois jetons sont dans l'urne a et les autres dans l'urne b.

Il y a now $\binom{5}{3}$ cas favorables (choix des trois jetons dans l'urne a). Donc $P(X=3) = \dfrac{\binom{5}{3}}{2^5} = \dfrac{10}{2^5}$.

• $(X = 4)$ signifie que quatre jetons sont dans l'urne a et le dernier dans l'urne b.

Il y a now $\binom{5}{4}$ cas favorables (choix des deux jetons dans l'urne a). Donc $P(X=4) = \dfrac{\binom{5}{4}}{2^5} = \dfrac{5}{2^5}$.

• $(X = 5)$ signifie que tous les jetons sont dans l'urne a.

Il y a now 1 cas favorables. Donc $P(X=5) = \dfrac{1}{2^5}$.

On vérifie bien que $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} P(X=k) = 1$.

2. Exprimons, à l'aide de X, l'événement V_a : « L'urne a est vide ».
L'urne a est vide si tous les jetons sont dans l'urne b et donc : $P(V_a) = P(X=0)$.
Faisons de même avec l'événement V_b : « L'urne b est vide ».
L'urne b est vide si tous les jetons sont dans l'urne a et donc : $P(V_b) = P(X=5)$.

3. On en déduit la probabilité de l'événement C : « L'une des deux urnes est vide ».

On a $C = V_a \cup V_b$ et comme les événements V_a et V_b sont incompatibles,

$$P(C) = P(V_a) + P(V_b) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Partie II. Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit E_i l'événement « le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donnons pour commencer la probabilité de l'événement contraire $\overline{E_i}$

Cet événement contraire $\overline{E_i}$ signifie que le jeton i est dans l'urne a. Calculons cette probabilité comme le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Le nombre de cas possibles est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal 5 dans un ensemble de cardinal 3, soit 3^5. Le nombre de cas favorables est le nombre d'applications d'un ensemble de 4 éléments (les quatre jetons qui ne sont pas le jeton i) vers un ensemble de 3 éléments (les urnes). C'est 3^4 cas. Donc :

$$P\left(\overline{E_i}\right) = \frac{3^4}{3^5} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_i) = \frac{2}{3}.$$

2. Soit V_a l'événement : « l'urne a est vide ». Comme E_i est pour tout entier i, « le jeton i n'est pas dans l'urne a », dire que l'urne a est vide c'est dire qu'aucun jeton n'est dans a. Alors :

$$V_a = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5.$$

3. Montrons que $P(V_a) = \dfrac{2^5}{3^5}$.

Comme les jetons sont indépendants les uns des autres, les événements E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5 sont mutuellement indépendants et :

$$P(V_a) = P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5\right) = P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3) \times P(E_4) \times P(E_5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}.$$

En notant V_b l'événement : « l'urne b est vide » et V_c l'événement : « l'urne c est vide », par symétrie du problème, on pourra admettre que $P(V_b)$ et $P(V_c)$ ont aussi cette même valeur. Et donc :

$$P(V_a) = P(V_b) = P(V_c) = \frac{2^5}{3^5}.$$

Partie III. Calcul de $P(N=2)$ et $P(N=3)$.

1. Que signifie en français l'événement $(N=3)$?
C'est simplement l'**événement impossible**. En effet, les jetons vont bien quelque part. Et $P(N=3)=0$.

2. Que signifie en français l'événement $\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c$?
Cela signifie que l'urne a n'est pas vide mais que l'urne b et l'urne c sont vides, et donc cela signifie que tous les jetons sont dans l'urne a. Et : $P\left(\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c\right)=\dfrac{1}{3^5}$.
3. On veut calculer la probabilité de l'événement $(N=2)$. On exprime dans un premier temps l'événement $(N=2)$ en fonction d'événements tels que $\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c$ et d'autres du même genre.
$N=2$ signifie que deux urnes sont vides et donc la troisième contient tous les jetons. Sauf que cette troisième urne a le droit d'être n'importe laquelle des trois urnes. Ainsi :

$$(N=2)=\left(\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c\right)\cup\left(V_a\cap\overline{V_b}\cap V_c\right)\cup\left(V_a\cap V_b\cap\overline{V_c}\right).$$

Comme les événements $\left(\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c\right)$, $\left(V_a\cap\overline{V_b}\cap V_c\right)$ et $\left(V_a\cap V_b\cap\overline{V_c}\right)$ sont deux à deux incompatibles,

$$P(N=2)=P\left(\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c\right)+P\left(V_a\cap\overline{V_b}\cap V_c\right)+P\left(V_a\cap V_b\cap\overline{V_c}\right)=\frac{3}{3^5}=\frac{1}{3^4}.$$

Partie IV. Espérance de N

1. On note Z_a la variable aléatoire égale à 1 si V_a est réalisé et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé et 0 sinon) et Z_c (Z_c vaut 1 si V_c est réalisé et 0 sinon).
• Reconnaissance de la loi de Z_a, de Z_b et de Z_c.
On sait grâce au cours que Z_a, Z_b et Z_c suivent une loi de Bernoulli. Le paramètre de chacune est $P(Z_a=1)$ (Les trois lois sont identiques toujours en invoquant la symétrie du problème par rapport à a, b et c. Or : $P(Z_a=1)=P(V_a)=\dfrac{2^5}{3^5}=\dfrac{32}{243}$. On écrit : $Z_a\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{32}{243}\right)$, $Z_b\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{32}{243}\right)$ et $Z_c\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{32}{243}\right)$.
On sait que l'espérance d'une loi de Bernoulli est son paramètre donc :

$$E(Z_a)=E(Z_b)=E(Z_c)=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}.$$

2. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimons N en fonction de Z_a, Z_b et Z_c.
Les v.a.r Z_a, Z_b et Z_c sont des fonctions indicatrices. Et $Z_a+Z_b+Z_c$ est une v.a.r qui comptent le nombre d'urnes vides.
Donc :$N=Z_a+Z_b+Z_c$.
3. L'espérance de N est :

$$E(N)=E(Z_a+Z_b+Z_c)=E(Z_a)+E(Z_b)+E(Z_c)=\frac{2^5}{3^5}+\frac{2^5}{3^5}+\frac{2^5}{3^5}=\frac{3\times2^5}{3^5}=\frac{2^5}{3^4}.$$

Partie V. Détermination de la loi de N

1. Montrons que $P(N=1)+2P(N=2)=\dfrac{2^5}{3^4}$.
On sait que $E(N)=0\times P(N=0)+1\times P(N=1)+2\times P(N=2)+3\times P(N=3)$. Comme $P(N=3)=0$,

$$E(N)=P(N=1)+2\times P(N=2)=\frac{2^5}{3^4}.$$

2. Déduisons en la valeur du réel $P(N=1)$.
On écrit : $P(N=1)+2\times P(N=2)=\dfrac{2^5}{3^4}\Rightarrow P(N=1)=\dfrac{2^5}{3^4}-2\times\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{30}{3^4}=\dfrac{10}{27}$.
3. Donnons enfin la loi de la variable aléatoire N.
On click and collect les résultats précédents, qui sont : $P(N=1)=\dfrac{30}{3^4}$, $P(N=2)=\dfrac{1}{3^4}$, $P(N=3)=0$.
Et donc cela entraîne : $P(N=0)=1-P(N=1)-P(N=2)-P(N=3)=\dfrac{50}{3^4}=\dfrac{50}{81}$.