DEVOIR LIBRE 2TSI

Premier problème : le processus de Moran

On étudie dans ce problème le processus de Moran, *qui modélise l'évolution de la fréquence d'un gène à deux allèles dans une population finie.*

Le problème est constitué de deux parties totalement indépendantes. Dans la première, on étudie le processus de Moran dans une population de 3 individus. Dans la seconde, on étudie la probabilité de disparition d'un gène dans le cas général.

Présentation du processus

On considère une population de taille constante, disons de N individus ($N \in \mathbb{N}^*$) portant un gène et on étudie l'évolution de ce gène possédant deux allèles, qu'on notera A et B. Le processus évolue comme suit :

- imaginons qu'à un instant $n \in \mathbb{N}$, la population contient i allèles A (avec $i \in \{0, 1, ..., N\}$) — et par conséquent $N - i$ allèles B.
- à l'instant $n + 1$, on pioche au hasard un individu dans la population, on note son allèle, puis on le remet dans la population. Ensuite on pioche un nouvel individu dans la population — éventuellement le même. Si les deux individus piochés ont le même allèle, rien ne change. Dans le cas contraire, on fait subir une mutation au dernier individu pioché de sorte que son allèle soit le même que celui du premier individu pioché.

  Cela s'apparente à deux tirages successifs avec remise.

Ainsi, plus un allèle est présent dans la population, plus il a de chance de se reproduire.

Ce procédé nous permet alors de construire une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est le nombre d'individus dans la population qui possède l'allèle A à l'étape n.

Partie A : Étude du cas particulier $N = 3$

Dans cette partie, on étudie le processus de Moran dans le cas : $N = 3$, c'est-à-dire dans une population de trois individus. Dans un premier temps, on calcule un produit matriciel. Dans un deuxième temps, on calcule la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Calculs préliminaires :** On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice M.

   (b) Montrer que $\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{9}$ sont valeurs propres simples de M, tandis que 1 est valeur propre double.

   (c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.