4. Pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}[X_{n+1}=k]$ en fonction de $\mathbb{P}[X_n=0]$, $\mathbb{P}[X_n=1]$, $\mathbb{P}[X_n=2]$ et $\mathbb{P}[X_n=3]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n=0] \\ \mathbb{P}[X_n=1] \\ \mathbb{P}[X_n=2] \\ \mathbb{P}[X_n=3] \end{pmatrix}$. Remarquons que : $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. En déduire que le vecteur U_n satisfait la relation de récurrence : $U_{n+1} = MU_n$, où la matrice M a été définie dans le calcul préliminaire.
6. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $U_n = M^n U_0$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[X_n=0] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n=1] = \frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n.$$

On admet pour la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[X_n=2] = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n=3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n.$$

8. En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}[X_n=0]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}[X_n=3]$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}[X_n] = 1$.

Partie B : Probabilité de disparition d'un allèle dans le cas général

On revient au processus de Moran dans le cas où $N \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

On admet que pour tous $i \in [\![1, N-1]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathbb{P}_{[X_n=0]}[X_{n+1}=0] = 1$ et $\mathbb{P}_{[X_n=N]}[X_{n+1}=N] = 1$.
- $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1}=i] = \dfrac{i^2+(N-i)^2}{N^2}$.
- $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1}=i+1] = \mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1}=i-1] = \dfrac{i(N-i)}{N^2}$.
- $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1}=j] = 0$ si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$.

Pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, on note :

— p_i la probabilité que, sachant qu'il y avait initialement i allèles A, l'allèle B disparaisse.

— q_i la probabilité que, sachant qu'il y avait initialement i allèles A, l'allèle A disparaisse.

10. Préciser les valeurs de p_0, p_N, q_0 et q_N.
11. On admet que pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$:

$$p_i = \frac{i(N-i)}{N^2} p_{i-1} + \frac{i^2+(N-i)^2}{N^2} p_i + \frac{i(N-i)}{N^2} p_{i+1}.$$

   (a) En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$: $p_{i+1} - p_i = p_i - p_{i-1}$.

   (b) En sommant les égalités précédentes, montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$:

$$p_{k+1} = p_k + p_1.$$

   (c) Exprimer finalement p_k en fonction de p_1, pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$ puis en déduire que : $p_k = \dfrac{k}{N}$.

12. (a) Justifier que pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$: $q_i = p_{N-i}$.

   (b) Calculer $p_i + q_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$.

   (c) Qu'en concluez-vous ?