Devoir libre 04

CORRECTION

Partie A

Q 1. (a) On calcule : $\chi_M(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2/9 & 0 & 0 \\ 0 & t-5/9 & -2/9 & 0 \\ 0 & -2/9 & t-5/9 & 0 \\ 0 & 0 & -2/9 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-5/9 & -2/9 & 0 \\ -2/9 & t-5/9 & 0 \\ 0 & -2/9 & t-1 \end{vmatrix} =$ $(t-1)^2 \begin{vmatrix} t-5/9 & -2/9 \\ -2/9 & t-5/9 \end{vmatrix}$. Et alors :

$$\chi_M(t) = (t-1)^2\left[\left(t-\frac{5}{9}\right)^2 - \frac{4}{81}\right] = (t-1)^2\left[t^2 - \frac{10}{9}t + \frac{21}{81}\right].$$

Or le discriminant de $t^2 - \frac{10}{9}t + \frac{21}{81} = 0$ est $\Delta = \frac{16}{81} = \frac{4^2}{9^2}$.
Et $t^2 - \frac{10}{9}t + \frac{21}{81}$ a pour racines $t_1 = \frac{1}{3}$ et $t_2 = \frac{7}{9}$. Ainsi :

$$\chi_M(t) = (t-1)^2\left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{7}{9}\right).$$

(b) C'est déjà fait.

(c) On remarque que $M(e_1) = e_1$ et $M(e_4) = e_4$ donc $\text{Vect}(\{e_1, e_4\}) \subset E_1(M)$. Donc $E_1(M)$ est de dimension au moins égale à 2 et comme 1 est valeur propre double, $\dim E_1(M) \leqslant 2$. Donc $\dim E_1(M) = 2$ et comme les autres sous-espaces propres sont de dimension 1 car ils sont associés à des racines simples, on en déduit que la somme des dimensions des trois sous-espaces propres est 4. Donc M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(d) $P^{-1}MP$ peut se calculer directement sinon on remarque que P est une matrice de passage. Les colonnes C_1 et C_2 de cette matrice sont les vecteurs e_1 et e_4, vecteurs propres associés à 1. Puis sa colonne C_3 vérifie :

$$MC_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/9 & 0 & 0 \\ 0 & 5/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 2/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Donc C_3 représente un vecteur propre de M associé à $1/3$.
De même,

$$MC_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2/9 & 0 & 0 \\ 0 & 5/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 2/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ -7/9 \\ -7/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}.$$

Donc C_4 représente un vecteur propre de M associé à $7/9$.

Finalement, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/9 \end{pmatrix}$.

(e) Pour le coup, il faut faire vraiment le produit des quatre matrices ici.

En fait $PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $M^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui ne sert pas ici. Attaquons le produit des 4 matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^n/9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le produit des deux premières puis des deux dernières donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3^n & 7^n/9^n \\ 0 & 0 & -1/3^{n-1} & -7^n/9^n \\ 0 & 0 & 1/3^{n-1} & -7^n/9^n \\ 0 & 1 & -1/3^{n-1} & 7^n/9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/6 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne : $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2\times 3^{n+1}} - \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{7}{9}\right)^n \\ \dfrac{1}{2\times 3^n} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{7}{9}\right)^n \\ -\dfrac{1}{2\times 3^n} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{7}{9}\right)^n \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2\times 3^n} - \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{7}{9}\right)^n \end{pmatrix}.$

Q 2 a. S'il n'y a aucune allèle A à l'instant n, aucune allèle n'est transformée alors et il n'y a aucune allèle A à l'instant $n+1$. Donc $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)=1$.
De même, S'il n'y a que des allèles A à l'instant n, aucune allèle n'est transformée alors et il n'y a que des allèles A à l'instant $n+1$. Donc $P_{[X_n=3]}(X_{n+1}=3)=1$.

Q 2 b. • Déterminons $P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=i)$. On peut considérer le problème comme le choix de deux boules avec remise dans une urne ayant trois boules. Cela fait $3^2=9$ résultats possibles. Les résultats favorables sont la réunion de deux cas : on tire un allèle A puis un autre allèle A ce qui donne $i\times i$ possibilités ou on tire un allèle B puis un autre allèle B ce qui donne $(3-i)\times(3-i)$ possibilités. On arrive bien à :

$$P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=i)=\frac{i^2+(3-i)^2}{9}.$$

• Déterminons $P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=i+1)$. Cela fait toujours $3^2=9$ résultats possibles. Les résultats favorables consiste à tirer un allèle A puis un allèle B qui devient A, ce qui donne $i\times(3-i)$ possibilités. On arrive bien à :

$$P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=i+1)=\frac{i(3-i)}{9}.$$

• Déterminons $P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=i-1)$. Cela fait toujours $3^2=9$ résultats possibles. Les résultats favorables consiste à tirer un allèle B puis un allèle A qui devient B, ce qui donne $(3-i)\times i$ possibilités. On arrive bien à :

$$P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=i-1)=\frac{i(3-i)}{9}.$$

• Et en une seule étape, transformer au moins deux allèles est impossible donc $P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j)=0$ si $j\notin\{i-1,i,i+1\}$.

Q 3 • Déterminons la loi de X_1. On a déjà $X_1(\Omega)=[\![0,3]\!]$.
Puis, pour tout $i\in[\![0,3]\!]$, $P(X_1=i)=\displaystyle\sum_{j=0}^{3}P_{[X_0=j]}(X_1=i)P(X_0=j)$.
Cela donne : $P(X_1=0)=P_{[X_0=0]}(X_1=0)P(X_0=0)+P_{[X_0=1]}(X_1=0)P(X_0=1)+$
$P_{[X_0=2]}(X_1=0)P(X_0=2)+P_{[X_0=3]}(X_1=0)P(X_0=3)=0+\dfrac{2}{9}+0+0=\dfrac{2}{9}$.
Puis : $P(X_1=1)=P_{[X_0=0]}(X_1=1)P(X_0=0)+P_{[X_0=1]}(X_1=1)P(X_0=1)$
$+P_{[X_0=2]}(X_1=1)P(X_0=2)+P_{[X_0=3]}(X_1=1)P(X_0=3)=0+\dfrac{5}{9}+0+0=\dfrac{5}{9}$.
Puis $P(X_1=2)=P_{[X_0=0]}(X_1=2)P(X_0=0)+P_{[X_0=1]}(X_1=2)P(X_0=1)$
$+P_{[X_0=2]}(X_1=2)P(X_0=2)+P_{[X_0=3]}(X_1=2)P(X_0=3)=0+\dfrac{2}{9}+0+0=\dfrac{2}{9}$.

Enfin $P(X_1=3)=P_{[X_0=0]}(X_1=3)P(X_0=0)+P_{[X_0=1]}(X_1=3)P(X_0=1)$
$+P_{[X_0=2]}(X_1=3)P(X_0=2)+P_{[X_0=3]}(X_1=3)P(X_0=3)=0+0+0+0=0.$

• Déterminons la loi de X_2. On a déjà $X_2(\Omega)=[\![0,3]\!]$.

Puis, pour tout $i\in[\![0,3]\!]$, $P(X_2=i)=\displaystyle\sum_{j=0}^{3}P_{[X_1=j]}(X_2=i)P(X_1=j)$.

Cela donne : $P(X_2=0)=P_{[X_1=0]}(X_2=0)P(X_1=0)+P_{[X_1=1]}(X_2=0)P(X_1=1)$
$+P_{[X_1=2]}(X_2=0)P(X_1=2)+P_{[X_1=3]}(X_2=0)P(X_1=3)=\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{9}\dfrac{2}{9}=\dfrac{28}{81}$.

Puis : $P(X_2=1)=P_{[X_1=0]}(X_2=1)P(X_1=0)+P_{[X_1=1]}(X_2=1)P(X_1=1)$
$+P_{[X_1=2]}(X_2=1)P(X_1=2)+P_{[X_1=3]}(X_2=1)P(X_1=3)=\dfrac{5}{9}\dfrac{5}{9}+\dfrac{2}{9}\dfrac{2}{9}=\dfrac{29}{81}$.

Puis : $P(X_2=2)=P_{[X_1=0]}(X_2=2)P(X_1=0)+P_{[X_1=1]}(X_2=2)P(X_1=1)$
$+P_{[X_1=2]}(X_2=2)P(X_1=2)+P_{[X_1=3]}(X_2=2)P(X_1=3)=\dfrac{5}{9}\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}\dfrac{5}{9}=\dfrac{20}{81}$.

Enfin, $P(X_2=3)=P_{[X_1=0]}(X_2=3)P(X_1=0)+P_{[X_1=1]}(X_2=3)P(X_1=1)$
$+P_{[X_1=2]}(X_2=3)P(X_1=2)+P_{[X_1=3]}(X_2=3)P(X_1=3)=\dfrac{2}{9}\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{81}$.

Q 4 On applique encore la formule des probabilités totales. Pour tout $k\in[\![0,3]\!]$,

$$P(X_{n+1}=k)=\sum_{j=0}^{3}P_{[X_n=j]}(X_{n+1}=k)P(X_n=j).$$

Cela donne, en utilisant **Q 2** :

$$P(X_{n+1}=0)=1\times P(X_n=0)+\frac{1\times(3-1)}{9}P(X_n=1)+0\times P(X_n=2)+0\times P(X_n=3)\Rightarrow$$

$$P(X_{n+1}=0)=1\times P(X_n=0)+\frac{2}{9}P(X_n=1)+0\times P(X_n=2)+0\times P(X_n=3).$$

$$P(X_{n+1}=1)=0\times P(X_n=0)+\frac{1^2+(3-1)^2}{9}P(X_n=1)+\frac{2\times(3-2)}{9}\times P(X_n=2)+0\times P(X_n=3)\Rightarrow$$

$$P(X_{n+1}=1)=0\times P(X_n=0)+\frac{5}{9}P(X_n=1)+\frac{2}{9}\times P(X_n=2)+0\times P(X_n=3).$$

$$P(X_{n+1}=2)=0\times P(X_n=0)+\frac{1\times(3-1)}{9}P(X_n=1)+\frac{2^2+(3-2)^2}{9}\times P(X_n=2)+0\times P(X_n=3)\Rightarrow$$

$$P(X_{n+1}=2)=0\times P(X_n=0)+\frac{2}{9}P(X_n=1)+\frac{5}{9}\times P(X_n=2)+0\times P(X_n=3).$$

$$P(X_{n+1}=3)=0\times P(X_n=0)+0\times P(X_n=1)+\frac{2\times(3-2)}{9}\times P(X_n=2)+\frac{3^2+(3-3)^2}{9}\times P(X_n=3)\Rightarrow$$

$$P(X_{n+1}=3)=0\times P(X_n=0)+0\times P(X_n=1)+\frac{2}{9}\times P(X_n=2)+1\times P(X_n=3).$$

Q 5 On en déduit alors : $U_{n+1}=\begin{pmatrix}1&2/9&0&0\\0&5/9&2/9&0\\0&2/9&5/9&0\\0&0&2/9&1\end{pmatrix}U_n$.

Q 6 $U_1=MU_0$ est vraie car $MU_0=\begin{pmatrix}2/9\\5/9\\2/9\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(X_1=0)\\P(X_1=1)\\P(X_1=2)\\P(X_1=3)\end{pmatrix}$.

Puis, supposons que $U_n=M^nU_0$ et comme $U_{n+1}=MU_n$, on a : $U_{n+1}=MM^nU_0=M^{n+1}U_0$.

Q 7 On sait que : $M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = U_n$. En usant de **Q 1 e**,

$$P(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n,$$

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n,$$

$$P(X_n = 2) = -\frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n,$$

$$P(X_n = 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3^n} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n.$$

Q 8 On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = \frac{1}{3}$.

Q 9 $E(X_n) = P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) = 1$ après remplaçement de $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = 3)$ par leurs valeurs.

Partie B

Q 10 • Si initialement 0 allèles A, N allèles B, rien ne change car on ne pioche que des allèles B. Alors $p_0 = 0$.

• Si initialement N allèles A, 0 allèles B, rien ne change encore car on ne pioche que des allèles A et $p_N = 1$.

De même, $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.

Q 11 a. On part de la relation admise en début de **Q 11** et on multiplie par N^2 de chaque côté. On a :

$$N^2 p_i = i(N-i)p_{i-1} + (i^2 + (N-i)^2)p_i + i(N-i)p_{i+1}.$$

Cela s'écrit : $(N^2 - i^2 - (N-i)^2)p_i = i(N-i)(p_{i-1} + p_{i+1})$ ou encore :

$$2(Ni - i^2)p_i = (Ni - i^2)(p_{i-1} + p_{i+1}) \Rightarrow 2p_i = p_{i-1} + p_{i+1} \Rightarrow p_{i+1} - p_i = p_i - p_{i-1}.$$

Q 11 b. On écrit : $\left[\begin{array}{ccc} p_2 - p_1 & = & p_1 - p_0 \\ p_3 - p_2 & = & p_2 - p_1 \\ \vdots & & \vdots \\ p_k - p_{k-1} & = & p_{k-1} - p_{k-2} \\ p_{k+1} - p_k & = & p_k - p_{k-1} \end{array}\right. \Rightarrow p_{k+1} - p_1 = p_k - p_0 = p_k \Rightarrow p_{k+1} = p_k + p_1.$

Q 11 c. Par récurrence immédiate, $p_k = kp_1$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$. Puis comme $p_N = 1$, $p_N = Np_1$ et donc :

$$p_1 = \frac{p_N}{N} = \frac{1}{N}.$$

Q 12 a. q_i est la probabilité que, sachant qu'il y avait i allèles A donc $N-i$ allèles B, l'allèle A disparait. Et p_{N-i} est la probabilité que, sachant qu'il y avait $N-i$ allèles A donc i allèles B, l'allèle B disparait.En intervertissant A et B, alors : $q_i = p_{N-i}$.

Q 12 b. Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $q_k = p_{N-k} = \frac{N-k}{k} = 1 - \frac{k}{N}$ et donc : $p_k + q_k = \frac{k}{N} + 1 - \frac{k}{N} = 1$.

Q 12 c. Les probabilitès p_i et q_i évoluent de façon inverse par une proportionnalité indépendante de i, donc du nombre initial d'allèles A.