

2TSI. DEVOIR LIBRE N°05

A rendre le jeudi 07 Janvier 2021

Les calculatrices n'ont aucun intérêt.

La plupart du temps, on peut admettre les questions en amont pour traiter les questions en aval.

Partie I

Constante d'Euler-Mascheroni

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geq 1$ par la relation :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}.$$

On pose pour tout $n \geq 1$, $w_n = \sum_{p=1}^n u_p$.

1. Prouver que, pour tout $p \geq 1$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
2. Établir alors que (w_n) est une suite croissante.
3. Montrer que cette suite converge vers un réel γ tel que $0 \leq \gamma \leq 1$.
4. Établir que, pour tout $p \geq 1$, $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u} du$.
5. En déduire que pour tout $p \geq 2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq u_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$.
6. On pose $r_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^N u_p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.
 - (a) Justifier que (r_n) existe.
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}$.
 - (c) On approche γ par w_n . Expliciter un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} .

Partie II

Formule de James Stirling

D'après la partie I, on sait qu'il existe un réel γ , appelé **constante d'Euler-Mascheroni** telle que, quand n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

T.S.V.P →

On pose de plus : $\forall n \geq 2$,

$$x_n = \int_{n-1}^n (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2} dt, \quad y_n = -\ln n + \int_{n-1}^n \ln t dt.$$

Et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1. Vérifier que $t \mapsto t \ln t - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln t$.
2. Montrer pour tout n supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{k=2}^n y_k = n \ln n - n + 1 - \ln(n!).$$

3. Vérifier, en effectuant une intégration par parties, que, pour $n \geq 2$:

$$y_n = - \int_{n-1}^n (t-n+1) \frac{1}{t} dt.$$

Effectuer de nouveau une intégration par parties et en déduire que, pour tout $n \geq 2$,

$$y_n = -\frac{1}{2n} - \frac{x_n}{2}.$$

4. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, $x_p \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.

En déduire que la suite $\left(\sum_{p=2}^n x_p \right)_{n \geq 2}$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.

5. Démontrer que, quand n tend vers $+\infty$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^n x_k \right) + o(1).$$

6. En posant $K_n = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^n x_k \right)$, vérifier que

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K$$

, où $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = K$, quand $n \rightarrow +\infty$.

7. On veut déterminer K dans cette question.

(a) En remarquant que $\sin^n x = \sin x \sin^{n-1} x$, déterminer par une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geq 2$.

(b) En déduire que pour $p \in \mathbf{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

(c) Montrer que $I_{2p} I_{2p+1} \sim \frac{\pi}{4p}$ pour $p \rightarrow +\infty$.

(d) Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}.$$

En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $n = +\infty$.

Et montrer, en particulier que si p tend vers $+\infty$, $I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$.

(e) Vérifier que $I_{2p} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2pe^K}}$ au voisinage de $p = +\infty$. En déduire la valeur de e^K .

(f) En déduire que lorsque $n \rightarrow +\infty$, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

On appelle ce résultat la **formule de Stirling**.

Partie III

Démonstration du théorème de Moivre-Laplace dans un cas particulier. Ici $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **Générateur aléatoire.**

On note, dans cette question et les suivantes, X une *v.a.r* de Bernoulli prenant les valeurs -1 et 1 de façon équiprobable, c'est-à-dire que :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Démontrer que X est une variable aléatoire centrée réduite, c'est-à-dire que $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

2. **Somme d'épreuves élémentaires.**

Soit Y_n la *v.a.r* égale à la somme de $2n$ *v.a.r* X indépendantes.

- (a) Montrer que Y_n ne prend que les valeurs paires de $\llbracket -2n, 2n \rrbracket$.
- (b) Dans le calcul de Y_n , soit R la *v.a.r* égale au nombre de fois où X vaut 1 et L la *v.a.r* égale au nombre de fois où X vaut -1 .
 - i. Que vaut $R + L$? En déduire l'expression de Y_n en fonction de R et de n seuls.
 - ii. Justifier que la loi de probabilité de R est une loi binomiale dont on donnera les paramètres. En déduire l'espérance $E(R)$ et la variance $V(R)$.
 - iii. En déduire $P(Y_n = 2k)$ pour $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$.

- (c) Montrer que Y_n est symétrique par rapport à 0 , c'est-à-dire :

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, P(Y_n = -2k) = P(Y_n = 2k).$$

- (d) Démontrer que Y_n est centrée (c'est-à-dire $E(Y_n) = 0$).

- (e) Calculer la variance $V(Y_n)$ et l'écart-type $\sigma(Y_n)$. La variable Y_n est-elle réduite ?

3. **Réduction de la variable aléatoire.**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = \frac{Y_n}{\sqrt{2n}}.$$

- (a) Démontrer que Z_n est une variable aléatoire centrée réduite.

- (b) Démontrer que $Z_n(\Omega) = \left\{ z_k = \frac{2k}{\sqrt{2n}}, k \in \llbracket -n, n \rrbracket \right\}$.

- (c) En déduire que :

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, P(Z_n = z_k) = \binom{2n}{n+k} 2^{-2n}.$$

4. **Histogramme** L'histogramme de Z_n est un diagramme constitué de $2n+1$ bandes jointives centrées sur les valeurs de z_k et dont l'aire est égale à $P(Z_n = z_k)$. La largeur commune de ces bandes est égale à l'espace inter-valeurs de la variable Z_n . C'est l'évolution de ce diagramme lorsque n tend vers $+\infty$ qui va nous amener à la loi normale.

Faire un dessin et démontrer que la hauteur de la bande centrée en z_k est :

$$h(z_k) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \binom{2n}{n+k} 2^{-2n}.$$

T.S.V.P →

5. Préparation au passage à la limite

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (on sait que les Z_n sont symétriques par rapport à O).

On veut créer une suite (x_n) d'éléments de $Z_n(\Omega)$ convergeant vers x .

On pose :

$$k_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} x \right\rfloor \text{ et } x_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} k_n.$$

- (a) Démontrer que $x_n \in Z_n(\Omega)$ pour tout n assez grand et en appliquant le théorème des Gen-darmes que la suite (x_n) tend vers x .
- (b) Montrer que

$$h(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n+k_n)!(n-k_n)!}.$$

C'est la limite de cette expression qui donnera la densité de la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

- (c) Démontrer que la limite du rapport $\frac{k_n^2}{n}$ quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{x^2}{2}$.
- (d) Vérifier que $n+k_n$ et $n-k_n$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

6. Calcul de la limite

- (a) En utilisant la formule de Stirling établie en fin de partie II, montrer, quand n tend vers $+\infty$,

$$h(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(1 - \frac{2k_n}{n+k_n}\right)^{k_n}}{\left(1 - \frac{k_n^2}{n^2}\right)^n}.$$

- (b) Posons :

$$A = \left(1 - \frac{2k_n}{n+k_n}\right)^{k_n} \text{ et } B = \left(1 - \frac{k_n^2}{n^2}\right)^n.$$

En utilisant $\ln(1-u) \sim -u$ quand u tend vers 0, calculer $\ln A$ et $\ln B$ puis leurs limites quand $n \rightarrow +\infty$.

Déterminer enfin la fonction g telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) = g(x).$$

Conclusion : g est appelée la densité de probabilité de la loi normale $N(0, 1)$. On dit que Z_n converge vers $N(0, 1)$.