Devoir surveillé 03

2TSI. Mathématiques

Durée 4 heures. Les calculatrices sont interdites.
Les deux exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Ils sont des extraits de sujet de CCINP en filière PSI (les questions sont adaptées pour être conforme au programme de TSI2) et en filière TPC.

Jeudi 17 décembre 2020

EXERCICE 01

On étudie ici la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, appelée **série de Gregory d'ordre** 1. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ le terme géneral de cette série et S sa somme si elle existe.

1. Expliquer pourquoi la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas absolument convergente.
2. On définit la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $v_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   On a ainsi : $u_2 = S_4 = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4$ et $v_2 = S_5 = u_2 + g_5$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
   (d) Montrer que la suite (v_n) est majorée par u_0. En déduire qu'elle est convergente de limite l_1.
   (e) De façon similaire, montrer que (u_n) est convergente de limite l_2.
   (f) En déduire que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et exprimer sa somme S en fonction de l_1 et de l_2.

EXERCICE 02

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \mathsf{Det}\,(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*
3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.
4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*
5. On considère : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.
6. Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Problème

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t)\, dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t)\, dt.$$

1. Écrire l'inégalité des accroissements finis appliquée à sin, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|\sin(t)| \leqslant t$. En déduire que pour tout $t > 0$, $\left|\frac{\sin t}{t}\right| < 1$.
2. Montrer que les fonctions F et G sont bien définies pour tout x fixé appartenant à $]0, +\infty[$ (on montre en fait l'existence des intégrales $F(x)$ et $G(x)$). On admettra qu'il en est de même de H.
3. En utilisant le résultat de la question 1, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

   On admet pour la suite que F ***est de classe*** C^1 ***sur*** $]0, +\infty[$ ***et que pour tout*** $x > 0$,
   $$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t\, dt = -G(x).$$
4. Pour $x > 0$, calculer $H(x) + iG(x)$ puis en déduire une expression simple pour G et pour H.
5. En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t)\, dt$.
   (On pourra faire le changement de variable $u = \alpha t$.)
6. En utilisant l'expression de la dérivée F', en déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Partie II - Autour de la formule de Viète

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la proposition P_n :
   $$\text{« Pour tout } t > 0 \text{ tel que } t \not\equiv 0 \bmod (2^{n-1}\pi)\text{, on a : } \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}. \text{ »}$$
   Indication : dans la transmission, on utilisera la formule $\sin a = 2\cos(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{2})$ *avec* $a = \frac{t}{2^n}$.

   On admet pour la suite : $\forall t > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ***:*** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$.
2. En déduire que pour tout $t > 0$ avec $t \neq 0\,(2\pi)$, en utilisant $\sin u \sim u$ quand u tend vers 0,
   $$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$
3. ***On admet que pour tout*** $x > 0$ ***:*** $\displaystyle F(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}\, dt$.

   Montrer alors, en utilisant la question 5 de la partie I, que : $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$.

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

4. On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)$.

   En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$ en remarquant que $\displaystyle\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)$ est une somme de Riemann en posant $p = 2^{n-1}$.
5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer : $\forall k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$, $\displaystyle\left|\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}\right| \leqslant \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$.
6. En déduire que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}\right) = 0$ et retrouver le résultat de la question 3 de cette partie.