# Pre-Hilbert and euclidean spaces

## ■ Scalar product and orthonormal basis

**Exercice 01**

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $\Psi : (\mathbf{R}_n[X])^2 \to \mathbf{R}, (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=-2014}^{2014} P(k)Q(k)$.
Pour quelles valeurs de $n$, $\Psi$ est-il un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$ ?

**Exercice 02**

On se place dans $\mathscr{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$.

1. Vérifier que $\langle ., .\rangle$ est bien un produit scalaire.
2. On pose : $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, $F = Vect(f_1, f_2)$. Déterminer une base orthogonale de $F$ puis orthonormale.

**Exercice 03**

$\mathbf{R}^3$ étant muni de sa structure canonique d'espace euclidien, soit la base de $\mathbf{R}^3$ :

$$\mathcal{F} : (\vec{u}_1 = (1, 0, 1), \vec{u}_2 = (1, 0, 2), \vec{u}_3 = (1, 1, 1)).$$

Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\mathcal{F}$,

## ■ Cauchy-Schwarz inequality

**Exercice 04**

1. $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$, $c_1, \cdots, c_n$ des réels positifs. Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 c_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2 c_k\right).$$
*Indication : on pourra considérer les vecteurs de* $\mathbf{R}^n$, $\vec{u}(a_k\sqrt{c_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ *et* $\vec{v}(b_k\sqrt{c_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$.
2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $x$ de $[0, 1]$ on a :
$$f^2(x) \leqslant x\left(\int_0^1 (f'(t))^2\, dt\right).$$
*On pourra se placer dans le p.s* $< f_1, f_2 >= \displaystyle\int_0^x f_1(t)f_2(t)\,dt$ *avec* $f_1(t) = 1$ *et* $f_2(t) = f'(t)$.
3. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^\star)^n$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Cas d'égalité ?
*Indication : on pourra considérer les vecteurs de* $\mathbf{R}^n$, $\vec{u}(\sqrt{x_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $\vec{v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

## ■ Orthogonal projection and orthogonality of linear subspace

**Exercice 05**

Soit $p$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que $p$ est une projection orthogonale sur un plan dont on donnera une équation.
*Indication : on pourra commencer par montrer* $A^2 = A$ *puis on cherchera* $\operatorname{Im} A$ *et* $\operatorname{Ker} A$.

**T.S.V.P →**

**Exercice 06**

Soit $(e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, soit $\vec{u} = e_1 + e_2 + e_3$, $\vec{v} = 2e_2$ et $F = \mathsf{Vect}\,\{(\vec{u}, \vec{v})\}$.

1. Déterminer une équation et une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Construire la matrice dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ de la projection orthogonale $p$ sur $F$.
   *Indication : on pourra déterminer la matrice $B$ de la projection orthogonale sur $F^\perp$ et on remarquera que $A + B = I_3$.*

**Exercice 07**

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ du produit scalaire $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$.

1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$ pour $\langle\, ,\, \rangle$.
3. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

**Exercice 08**

$F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$ préhilbertien. Montrer que :
**1.** $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$. **2.** $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. **3.** $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
*Indication : on part d'un vecteur du premier espace vectoriel et on démontre qu'il appartient au second.*

## ■ Distance and minimizing problems

**Exercice 09**

Dans $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne classique, on pose :

$$F = \left[ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - 2t & = & 0 \\ y + z - 2t & = & 0 \end{array} \right. \right] \text{ et } \vec{u}(1, 2, 3, 4).$$

1. Montrer que $(\vec{u}_1(1, 1, -1, 0), \vec{u}_2(2, 0, 2, 1))$ forme une base de $F$.
2. Trouver une base orthonormale de $F$ par le procédé de Gram-Schmidt.
3. Déterminer les coordonnées de $p(\vec{u})$, projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $F$.
   En déduire la distance de $\vec{u}$ à $F$.

**Exercice 10**

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f,\, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f,\, g\rangle$ est un produit scalaire.
2. On pose pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $I(a, b, c) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|t| - at^2 - bt - c\right)^2\, dt$.
   (a) Trouver $(a, b, c)$ pour que $I(a, b, c)$ soit minimale.
   (b) Calculer le minimum en question.

**Exercice 11**

Soit $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.

1. Interpréter $\Phi = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \left( \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ comme la distance d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
   Indication : introduire $U = (1, 1, \cdots, 1)$ et $F = \mathsf{Vect}\,(X, U)$.
2. En déduire qu'il existe un couple $(a, b)$ de $\mathbf{R}^2$ en lequel cette borne inférieure est atteinte. Calculer $a$ en fonction des quantités :
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \overline{C}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$
3. Dans le cas $X = (3, 4, 6, 9, 10)$ et $Y = (-3.9, -2.1, 2.5, 7.9, 9.2)$, calculer $a$ et $b$. Interpréter ce que représente la droite $y = ax + b$ par rapport aux points $(3, -3.9), (4, -2.1), (6, 2.5), (9, 7.9), (10, 9.2)$ ?