Sheet of exercises. 2TSI

Fourier series

Exercice 01

Représenter graphiquement (sur 3 périodes) puis calculer les coefficients de Fourier et étudier la convergence de la série de Fourier dans les cas suivants.

1. f_1 est la fonction 1-périodique, affine sur $[0,1[$ et vérifiant $f_1(0)=0$ et $\lim_{t\to 1^-} f_1(t)=3$.
2. f_2 est définie sur $\mathbf{R}$ par $f_2(t)=|\cos t|$.
3. f_3 est la fonction 2π-périodique définie par $f_3(t)=t^2$ sur $[0,2\pi[$.

Exercice 02

D'après Oral CCP 2007

En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f_2 définie à l'exercice 01, montrer la convergence et déterminer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Exercice 03

En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f_3 définie à l'exercice 01, montrer la convergence et déterminer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Exercice 04

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

1. Montrer que f est continue, 2π-périodique et impaire.
2. Donner une expression simple de $f(x)$ pour $x\in[0,\pi]$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier S_f.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 05

Soit $a\neq 0$ et f est la fonction 2π-périodique définie par : $f(x)=e^{ax}+e^{-ax}$ pour $x\in[-\pi,\pi[$.
Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier de f.
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2+a^2}$ pour $x\in[-\pi,\pi[$.

Exercice 06

Soit f continue et T-périodique (avec $T>0$) et à valeurs réelles. Montrer que si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls alors f est nulle.

Exercice 07

D'après Oral CCP 2009

1. Représenter f, 2π-périodique, nulle sur $[-\pi,0]$ et valant $\cos x$ sur $]0,\pi[$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$ est convergente et calculer sa somme.