Functions of several real variables

Exercice 01

Dessiner puis reconnaître (est-ce une partie ouverte, fermée, bornée ?) :

$$A = \{(x, y), 1 < |x| < 2\} \text{ et } B = \{(x, y), |x + y| \leqslant 1 \text{ et } |x - y| \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + (y - 2)^2 + z^2 < 5\}.$$

Exercice 02

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^3 - y^3}{x + y}$ est continue en tout point (x_0, y_0), où $y_0 \neq -x_0$ en revenant à la définition. Que peut-on dire de son prolongement en $(0, 0)$?

Exercice 03

Étudier la continuité sur leur domaine de définition (à trouver) des fonctions :

$$f : (x, y, z) \mapsto \frac{-x^3y^4z + \ln(x^2 + y^2 + z^2)}{e^{xyz}(x + y)},\ g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{si} \quad (x, y) \in \mathcal{B}(\vec{0}, 1) \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 1} & \text{si} \quad (x, y) \notin \mathcal{B}(\vec{0}, 1) \end{cases}.$$

Exercice 04

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable.
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = \varphi(x + y)$, **2.** $g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, **3.** $k(x, y) = \varphi(xy)$.

Exercice 05

Calculer les dérivées partielles premières (lorsqu'elles existent) de :

$$f_1(x, y) = \ln(xy),\ f_2(x, y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right),\ f_3(x, y) = x^y.$$

Exercice 06

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2y.$$

Exercice 07

On considère la fonction :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?

T.S.V.P $\rightarrow$

Exercice 08

Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $3\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, en posant $\left\{\begin{array}{ccc} u & = & 2x+3y \\ v & = & x+y \end{array}\right.$

Exercice 09

Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6f(x,y)$.
(On pourra poser $f(x,y) = g(\rho,\theta)$.)

Exercice 10

Résoudre les équations aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y^3 + x^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2)}$.
Faire de même avec : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 + x$.

Exercice 11

Soit $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 12

On considère l'équation de propagation des ondes de la forme : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, où u est une fonction des variables spatiale x et temporelle t et $v > 0$ fixé.

1. Effectuer dans l'équation le changement de variable $X = x - vt$ et $Y = x + vt$.
2. En déduire la forme générale de $u(x,t)$.

Exercice 13

On considère $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2$.

1. Déterminer les points critiques (c'est-à-dire les points qui annulent $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$).
2. Soit (a,b) l'unique point critique trouvé. Étudier le signe de $f(x_1,x_2) - f(a,b)$. Conclure.

Exercice 14

Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Donner l'équation du plan Π_Ω tangent à S au point $\Omega = (1,0,0)$.
2. Déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux de O sur les plans tangents à S.

Exercice 15

Déterminer les points de la surface S d'équation cartésienne $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ dont le plan tangent est parallèle au plan Π d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 16

On considère les surfaces d'équations respectives : $z = x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$, $z = x^2$ et $z = x^3$.
Pour chacune d'entres elles, déterminer une équation du plan tangent en O puis étudier la position de la surface par rapport à ce plan.