Sheets of exercises. 2TSI

Probability of countable universes

■ Countable universe

Exercice 01

Soit A un événement et $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille dénombrable d'événements de Ω.

1. Montrer que : $A\cup\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}B_n\right)=\bigcap_{n=0}^{+\infty}(A\cup B_n)$ et que : $A\cap\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A\cap B_n)$.
   Starter : on raisonnera par double inclusion. Pour montrer l'inclusion directe, on part de $x\in A\cup\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}B_n\right)$ *et on montre que* $x\in\bigcap_{n=0}^{+\infty}(A\cup B_n)$. *On rappelle que si* $x\in A\cup B$ *alors* $x\in A$ *ou* $x\in B$. *Même principe pour l'inclusion réciproque et pour l'autre égalité, même combat !*
2. Montrer que : $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty}B_n}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{B_n}$ et que : $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty}B_n}=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\overline{B_n}$.

   Starter : ici, on peut raisonner par équivalence et partir de $x\in\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty}B_n}\Leftrightarrow x\notin\bigcup_{n=0}^{+\infty}B_n$.

Exercice 02

On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i\in\mathbf{N}^*$, on note

$$A_i : \ll \text{Obtention de l'as au i}^{\text{ème}}\text{ lancer} \gg.$$

1. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :
$$E_1=\bigcap_{i=4}^{+\infty}A_i,\quad E_2=\left(\bigcap_{i=1}^{3}\overline{A_i}\right)\cap\left(\bigcap_{i=4}^{+\infty}A_i\right),\quad E_3=\bigcup_{i>3}A_i.$$
2. Écrire à l'aide des A_i : « on obtient au moins une fois l'as au-delà du $n^{\text{ème}}$ lancer ».
3. On pose $C_n=\bigcup_{i>n}A_i$. Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante ($C_{n+1}\subset C_n$, $\forall n\geqslant 1$).
   Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique $C=\bigcap_{n\geqslant 1}C_n$.
4. Écrire à l'aide des A_i les événements :
   ▷ B_n : « On n'obtient plus que des as à partir du n$^{\text{ème}}$ lancer ».
   ▷ B : « On n'obtient plus que des as à partir d'un certain lancer ».

■ Probability of countable universe

Exercice 03

On pose : $\forall n\in\mathbf{N}$, $P(n)=\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $(\mathbf{N},\mathscr{P}(\mathbf{N}))$ et calculer la probabilité de l'événement : $B=\{n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 10\}$.

Exercice 04

Soit $a\in]1,+\infty[$, et $\zeta(a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^a}$ la somme de la série de Riemann convergente. On définit une probabilité P_a sur $\mathbf{N}^*$ en posant : $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $P_a(\{n\})=\dfrac{1}{\zeta(a)\,n^a}$.
Calculer $P_a(2\mathbf{N}^*)$. Généraliser à $P_a(m\mathbf{N}^*)$, $m\in\mathbf{N}^*$.

Exercice 05

$\Omega = \mathbf{N}$. On fixe $c \in]0,1[$ et : $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(\{k\}) = A_c \dfrac{c^k}{k!}$.
Déterminer le nombre A_c pour que $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}), P)$ soit un espace probabilisé et calculer la probabilité de l'ensemble des entiers naturels impairs.
Starter : on utilisera le développement en série entière de e^x.

■ Conditional probability and independance in countable universe

Exercice 06

Pour se détendre, deux 5/2 de Prepa Raphael et Corentin lancent chacun leur tour une fléchette sur le sujet de Math du concours de l'année précédente qu'ils ont trouvé infaisable. Ce sujet est placé à une distance raisonnable des deux joueurs. Le premier qui touche le sujet a gagné. Le tirage au sort a désigné Raphael qui commence. Son habilité fait qu'il a la probabilité $p_r > 0$ de toucher le sujet chaque fois qu'il lance sa fléchette et Corentin qui fait son premier lancer après le premier de Raphael, a la probabilité $p_c > 0$ de toucher le sujet à chacun de ses lancers.

1. Quelle est la probabilité pour que Raphael gagne ?
   Starter : Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on notera R_n l'événement ≪ Raphael atteint la cible au $n$ème essai ≫ et C_n l'événement ≪ Corentin atteint la cible au $n$ème essai ≫. Si R est l'événement ≪ Raphael gagne ≫ alors R se met sous la forme d'une réunion infinie dénombrable d'événements R_i, C_i ou leurs complémentaires.
   On rappelle enfin que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$ pour $0 \leqslant q < 1$.
2. Calculer de même la probabilité pour que Corentin gagne ? Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine (c'est-à-dire qu'un des deux joueurs gagne).
   Starter : l'idée est de calculer la probabilité de C qui est l'événement ≪ Raphael gagne ≫, exactement comme à la question précédente puis de montrer que $P(R \cup C) = 1$.
3. Donner les valeurs de p_r et de p_c pour que le jeu soit équitable.
   Starter : il s'agit de partir de la condition que $P(R) = P(C)$.

Exercice 07

Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une légère décharge électrique et revient à son point de départ. On s'intéresse au nombre d'essais utilisés pour trouver la bonne porte. On envisage successivement trois hypothèses.

a. *Le rat a une mémoire parfaite. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.*

b. *Le rat a une mémoire immédiate. À chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.*

c. *Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des portes.*

Pour chacune de ces hypothèses, définir l'univers et calculer la probabilité de l'événement B_n : ≪ le rat utilise n essais pour trouver la bonne porte ≫.
Starter : on note A_k l'événement : ≪ au $k^{\text{ème}}$ essai, le rat trouve la bonne porte ≫ et B_n s'écrit $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$. On pourra utiliser la formule des probabilités composées.

Exercice 08

D'après CCINP filière PC

On considère une suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ dévenements **indépendants** et on suppose que la série de terme général $P(A_n)$ **diverge**.

1. Montrer la loi de Morgan : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\overline{\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.
2. Montrer que pour tout entier n non nul, $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right)$.

   Starter : on montrera d'abord que $P\left(\overline{\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(1 - P\left(A_i\right)\right)$.

3. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$.

4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$.

   Dans la suite, on admettra que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)$.

5. Application. On lance un nombre dénombrable de fois une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose tous les lancers indépendants. On considère l'évenement pour tout n entier non nul, A_n : « on obtient Pile au $(2n)^{\text{ème}}$ et au $(2n+1)^{\text{ème}}$ lancers ». Que peut-on dire de la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$? On pose $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$; que signifie E ? Calculer $P(E)$ et en déduire la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs.

Exercice 09

Posé au concours CCINP, filière TPC

On décide de simuler des tirages répétés avec remise à l'aide d'un programme informatique. Ce programme détermine aléatoirement un entier $n \in \mathbb{N}^\star$, puis génère une liste de n valeurs, elles aussi choisies aléatoirement parmi les nombres 0 et 1. Les choix des n valeurs sont indépendants et à chaque étape de génération d'un élément de la liste, la probabilité d'obtenir 1 est égale à λ avec $\lambda \in]0,1[$.

On note :
- L_n l'événement : « on a généré une liste de n valeurs ».
- S_k l'événement : « la liste obtenue contient exactement k fois la valeur 1 ».
- T_k l'événement : « la liste obtenue contient au moins k valeurs ».

1. Soient $p \in]0,1[$ et $a \in \mathbb{R}_+^\star$.
   On suppose que la probabilité p_n d'obtenir la valeur n, c'est-à-dire $P(L_n)$, est égale à $a \times p^n$. Rappeler la valeur de la somme de la série numérique convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} p_n$. En déduire la valeur de a.
2. Déterminer la probabilité de l'événement T_k pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
   Starter : on remarquera que $T_k = \bigcup_{n\geqslant k} L_n$.
3. (a) Justifier que la probabilité $P_{L_j}(S_k)$ (probabilité de S_k sachant L_j)) pour $k \in \mathbb{N}^\star$ et $j \in \mathbb{N}^\star$ tel que $j \geqslant k$, vaut : $P_{L_j}(S_k) = \binom{j}{k}\lambda^k(1-\lambda)^{j-k}$.

   (b) En déduire que la probabilité d'obtenir exactement k fois la valeur 1 dans une liste générée contenant au moins k valeurs est égale à :
   $$P(S_k \cap T_k) = \frac{a}{k!}(\lambda p)^k \sum_{j=k}^{+\infty} j(j-1)...(j-k+1)((1-\lambda)p)^{j-k}.$$
   Starter : on remarquera que $\mathbb{P}(S_k \cap T_k) = \mathbb{P}(S_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{L_j}(S_k)\mathbb{P}(L_j)$.
4. (a) Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, rappeler l'expression de son développement en série entière au voisinage de 0 et la valeur du rayon de convergence de la série obtenue.

   (b) Démontrer par réccurence que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,
   $$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$
   Énoncer le théorème de dérivation d'une série entière sur son intervalle de convergence.
   Calculer $P(S_k \cap T_k)$ en fonction de $f^{(k)}((1-\lambda)p)$ et en déduire la probabilité de l'événement S_k sachant T_k.

Exercice 10

On considère des sacs de billes S_1, S_2, ... tels que S_1 contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes. Et tous les autres sacs S_2, S_3, ... contiennent 2 billes jaunes et 2 billes vertes.
On tire au hasard une bille de S_1 et on la met dans S_2.
Puis on tire une bille de S_2 et on la met dans S_3, ainsi de suite.
pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n = « la bille tirée dans S_n est verte » et $P(E_n)$ sa probabilité.

1. Déterminer $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$, $P_{\overline{E_1}}(E_2)$ et $P(E_2)$.
   Starter : Pour $P(E_2)$, on applique la formule $P(E_2) = P_{E_1}(E_2)P(E_1) + P_{\overline{E_1}}(E_2)P(\overline{E}_1)$.
2. Exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
   Starter : On applique encore la même formule : $P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})P(\overline{E}_n)$.
   Si vous lisez la suite de l'énoncé, vous avez un moyen de voir si ce que vous avez trouvé est cohérent.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0.4$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0.2\, u_n + 0.4$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 0.5.
   Starter : si vous avez de l'odorat, vous sentez la récurrence !
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. *Starter : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.*
   (c) Justifier que (u_n) est convergente et préciser sa limite. Conséquence pour $P(E_n)$ quand n est très grand ?
   Starter : Toute suite croissante et majorée est ... Par ailleurs, nul besoin de trouver u_n en fonction de n. Vous savez que si $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l alors $l = f(l)$.

Exercice 11

On considère les matrices suivantes :
$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $A^2 - 2A$.
   (b) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer AU et AV.
   En déduire que si ϕ est l'endomorphisme associé canoniquement à A, et si l'on pose la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1), \vec{u}_2 = (1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, alors la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est C.
   Justifier alors l'égalité $P^{-1}AP = C$.
2. (a) Exprimer B en fonction de I_2 et de A. Exprimer de même D en fonction de I_2 et de C.
   (b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P^{-1}B^nP = D^n$. Donner les coefficients de D^n.
   (b) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.
4. Ben et Nuts jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$. On suppose que c'est Ben qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
   Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Ben gagne le $n^{\text{ème}}$ échange » et B_n l'événement « Nuts gagne le $n^{\text{ème}}$ échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
   (a) Donner les valeurs de a_1 et de b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \dfrac{5}{9}$.
   (b) On observe que Ben emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n pour $n \geqslant 1$.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier : $X_{n+1} = \dfrac{1}{3}BX_n$.
   (e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $X_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
   (f) Déduire de la question **3-c** que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{3^n+1}{2 \times 3^n}$.
   Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$. Que se pase t-il quand n tend vers $+\infty$.