Korrektur. DS03

EXERCICE 01

1. $|g_k| = \dfrac{1}{2k+1} \sim \dfrac{1/2}{k}$. Or $\sum \dfrac{1/2}{k} = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{k}$ est une série divergente (série harmonique) donc par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum |g_k|$ diverge, i.e.
$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas absolument convergente.

2-a Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$v_n - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} = -\frac{1}{4n+3} \leq 0.$$

2-b Soit $n \in \mathbf{N}$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} \\ &= -\frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5} = -\frac{2}{(4n+3)(4n+5)} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante.

2-c Soit $n \in \mathbf{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)+1} \\ &= \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} = \frac{2}{(4n+5)(4n+7)} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est croissante.

2-d La suite (u_n) est décroissante donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq u_0$. En utilisant la question 17.a), on obtient donc que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leq u_0$, i.e. (v_n) est majorée par u_0.
La suite (v_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers une limite l_1.

2-e La suite (v_n) est croissante donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \geq v_0$. En utilisant la question 2-a, on obtient donc que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq v_0$, i.e. (u_n) est minorée par v_0.
La suite (v_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite l_2.

2-f Tout d'abord, $v_n - u_n = -\dfrac{1}{2(2n+1)+1} \longrightarrow 0$ et donc u_n et v_n forment un couple de suites adjacentes. Donc par unicité de la limite, on obtient $l_2 - l_1 = 0$ i.e. $l_1 = l_2$. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent toutes les deux vers la même limite l_1. Donc, (S_n) converge vers $l_1 (= l_2)$ i.e. la série converge et sa somme vaut $l_1 (= l_2)$.

EXERCICE 02

1. Déterminons le polynôme caractéristique $\chi_A = \mathrm{Det}\ (XI_3 - A)$ de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, en le décomposant en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
On écrit $\chi_A(X)$ et on procède pour commencer à l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & X-2 & X-2 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}.$$

Puis, on fait les opérations élémentaires $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -2 & X+2 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}.$$

Il reste à développer selon la dernière colonne.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -2 & X+2 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ -2 & X+2 \end{vmatrix} = (X-2)(X+2)X.$$

2. La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples.

D'après le cours, les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 2, -2\}.$$

On sait toujours, d'après le cours, que les sous-espaces propres sont de dimensions inférieures ou égales aux ordres de multiplicités des valeurs propres. Comme l'ordre de multiplicité est 1, les sous-espaces propres qui sont de dimension au moins égales à 1, sont exactement de dimension 1.

3. • Déterminons le polynôme caractéristique χ_B de B et décomposons le comme pour celui de A, en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

On écrit $\chi_B(X)$ et on commence par l'opération élémentaire : $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$.

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X & 2 \\ X & -1 & X \end{vmatrix}.$$

Puis, on effectue l'opération élémentaire : $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X & 2 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix}.$$

Il reste à développer selon la première colonne.

$$\chi_B(X) = X \begin{vmatrix} X & 2 \\ -2 & X \end{vmatrix} = X(X^2+4) = X(X+2i)(X-2i).$$

• Vérifions que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

On part de $i\chi_B(iX)$.

$$i\chi_B(iX) = i(iX)(iX+2i)(iX-2i) = i^4 X(X+2)(X-2).$$

On met i en facteur quatre fois.

$$i\chi_B(iX) = X(X+2)(X-2) = \chi_A(X).$$

4. • La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

On sait que $\chi_B = X(X+2i)(X-2i)$ et donc n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et on peut en conclure que la matrice B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par contre χ_B est scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$ et on peut en conclure que B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

• Donnons la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants, sans déterminer les espaces propres de B dans cette question.

Les valeurs propres de B sont bien entendu les racines de son polynôme caractéristique et il faut distinguer les racines réelles et les non réelles.

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\},\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, 2i, -2i\}.$$

On applique le même raisonnement qu'à la question **2**. Les sous-espaces propres de B sont de dimensions inférieures ou égales aux ordres de multiplicités des valeurs propres correspondantes et au moins de dimension 1. Dans $\mathbb{R}$, le seul sous-espace propre $E_0(B)$ associé à 0 est donc de dimension 1. Dans $\mathbb{C}$, les trois sous-espaces propres $E_0(B)$, $E_{2i}(B)$, $E_{-2i}(B)$ sont de dimension 1 car les trois valeurs propres sont simples.

5. On considère $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Exprimons $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

On commence par remarquer que : $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Puis on fait le produit $D^{-1}AD$.

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On continue.

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -iB.$$

6. • Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculons $\Delta^{-1}A\Delta$.

$$\Delta^{-1}A\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On fait les produits.

$$\Delta^{-1}A\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Et on en déduit le produit des trois matrices.

$$\Delta^{-1}A\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

• La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car la matrice $\Delta^{-1}A\Delta$ est symétrique et à coefficients réels et est donc diagonalisable, d'après le théorème spectral. Comme A est semblable à $\Delta^{-1}A\Delta$ (car Δ est une matrice de passage car inversible) qui est une matrice diagonalisable, A est elle-même diagonalisable.

Problème

Partie I – Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

I-1. Montrons que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

• *Méthode 1* : on peut tenter de passer par l'inégalité $t \geqslant 0 \Rightarrow \sin(t) \leqslant t$.
En effet, posons $g(t) = t - \sin t$.
Alors $g'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$. Et g est croissante et comme $g(0) = 0$, on a bien : $\sin t \leqslant t$. Pour rigoureusement passer à $|\sin t| \leqslant t$, il faut distinguer les intervalles du type $I_n = [2n\pi,\ (2n+1)\pi]$ et $J_n = [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$, pour n entier naturel.
Si $t \in I_n$, $\sin t \geqslant 0$ et $|\sin t| = \sin t$ et on a bien : $|\sin t| \leqslant t$.
Si $t \in J_n$, $\sin t \leqslant 0$. Et $|\sin t| = -\sin t$. Il faut montrer alors : $-\sin t \leqslant t$. Or $-\sin t \in [0, 1]$ et $t \in J_n$ donc $t \geqslant \pi$. On a bien : $-\sin t \leqslant t$ et donc $|\sin t| \leqslant t$.

• *Méthode 2* : Plus rapide mais il faut y penser. C'est l'inégalité des accroissements finis.
Rappel : pour appliquer l'inégalité des accroissements finis, la fonction f doit être continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $K = \sup\limits_{x \in]a,b[} |f'(x)|$, alors : $|f(b) - f(a)| \leqslant K|b - a|$.
Ici $f = \sin$ est continue sur $[0, t]$, de classe C^1 sur $]0, t[$, et sa dérivée vérifie :

$$K = \sup_{x \in]0,t} |f'(x)| = \sup_{x \in]0,t} |\cos x| \leqslant 1.$$

Cela donne, en se rappelant que $t \geqslant 0$:

$$|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant 1 \cdot |t - 0| \Rightarrow |\sin(t)| \leqslant t.$$

Remarque : En divisant par $t > 0$, on obtient : $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$ et même d'ailleurs $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| < 1$ pour $t > 0$.

I-2. Pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, dt$, $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t)\, dt$.
Montrons que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire que les intégrales correspondantes convergent.

• Convergence de $F(x)$ pour tout $x > 0$ fixé.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc il ne reste à étudier qu'au voisinage des deux extrémités.
Au voisinage de 0, $\sin t \sim t$ et donc f est prolongeable par continuité en $t = 0$ avec $f(0) = 1$. L'intégrale existe donc en 0.
Puis, d'après la question **Q 1**, $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$ pour $t > 0$. Donc, en posant $a > 0$ fixé quelconque, pour tout $t \in [a, +\infty[$, $|f(t)| \leqslant e^{-tx}$. Et la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. Il en est de même de f. Donc $F(x)$ est une intégrale convergente.

• Convergence de $G(x)$ pour tout $x > 0$ fixé.
La fonction $g : t \mapsto \sin t e^{-tx}$ est continue sur $[0, +\infty[$. La fonction G est donc intégrable sur $[0, a]$, où $a > 0$ est fixé quelconque.
Puis, en posant toujours $a > 0$ fixé quelconque, pour tout $t \in [a, +\infty[$, $|g(t)| \leqslant e^{-tx}$. Et la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. Il en est de même de g. Donc $G(x)$ est une intégrale convergente.

• Convergence de $H(x)$ pour tout $x > 0$ fixé.
C'est exactement comme G en remplaçant $\sin$ par $\cos$.

I-3. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

On remarque que $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ (prolongée en $t = 0$ par $f(0) = 1$) est intégrable sur $[0, +\infty[$ et d'après le cours, pour tout $x > 0$ fixé,

$$|F(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, dt \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| e^{-tx}\, dt.$$

On utilise encore le résultat de **Q1** : $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$.

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt.$$

$$|F(x)| \leqslant \left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

On peut conclure.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

I-4. Trouvons une expression simple pour G et pour H.
Dans l'énoncé, on donne l'indication qu'on pourra calculer $H(x) + iG(x)$. On écrit, pour tout $x > 0$,

$$H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}(\cos(t) + i\sin(t))\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,dt.$$

Pour $X > 0$, on a :

$$\int_0^{X} e^{(i-x)t}\,dt = \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{X} = \frac{e^{(i-x)X}}{i-x} - \frac{1}{i-x}.$$

On fait tendre X vers $+\infty$. La quantité $\left|\dfrac{e^{(i-x)X}}{i-x}\right| = \dfrac{e^{-xX}}{\sqrt{1+x^2}}$ tend vers 0 et donc :

$$H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,dt = -\frac{1}{i-x}.$$

Puis, on va arranger l'expression obtenue pour pouvoir séparer partie réelle et partie imaginaire. On fait la multiplication au numérateur et au dénominateur par $x + i$.

$$H(x) + iG(x) = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + i\frac{1}{x^2+1}.$$

On en déduit donc :

$$H(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ et } G(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

I-5. Déduisons en, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\,dt$.

On effectue le changement de variable $u = \alpha t$ pour retrouver, à un coefficient près, la fonction H. Cela démontre en même temps la convergence de I_α. Le changement de variable $t \mapsto \alpha t$ est possible car il est une application de classe C^1 et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On part de $du = \alpha dt$ et sous réserve d'existence de I_α,

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\alpha}u}\cos(u)\frac{du}{\alpha}.$$

Finalement :

$$I_\alpha = \frac{H\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha}.$$

Comme $\dfrac{H\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha}$ est une valeur finie, I_α existe au passage. On termine la calcul de I_α en utilisant $H(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ pour tout $x > 0$.

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{x}{\alpha}}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{x}{x^2+\alpha^2}.$$

I-6. Déduisons de ce qui précède une expression simple pour F puis $F(1)$.
En utilisant la double égalité admise, on sait que pour tout $x > 0$, $F'(x) = -G(x)$.

$$\forall x > 0,\ F'^{]}(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

On sait qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est $\arctan$. On en déduit l'existence de $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0,\ F(x) = -\arctan(x) + K.$$

Il reste à déterminer la valeur K. On utilise maintenant la question **Q3**. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$0 = -\frac{\pi}{2} + K \Rightarrow K = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Enfin,

$$F(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Remarque : cette dernière égalité s'écrit aussi : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t}\, dt = \frac{\pi}{4}.$

Partie II – Autour de la formule de Viète

II-1. Il faut montrer que pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}.$

Remarque : Pour commencer, il faut pour la cohérence de l'écriture du second membre *a priori* restreindre le domaine de définition de t. En effet, si $n = 1$, l'expression à montrer est : $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{\sin(t)}{2\sin(t/2)}$. La quantité $\sin(t/2)$ est nulle si $t = 0\,[2\pi]$. Il faut donc supposer $t \neq 0\,[2\pi]$. De même, si $n = 2$, l'expression à montrer est : $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2^2}\right) = \dfrac{\sin(t)}{2^2\sin(t/2^2)}$. La quantité $\sin(t/2^2)$ est nulle si $t = 0\,[2^2\pi]$. Il faut donc supposer $t \neq 0\,[2^2\pi]$. Ainsi de suite, on doit *a priori* supposer $t \neq 0\,[2^n\pi]$ pour tout entier n non nul. Réciproquement, si $t = 2^n\pi$, avec n entier naturel non nul, posons $t = 2^n\pi + h$. Le second membre de l'égalité à montrer sécrit :

$$\frac{\sin\left(2^n\pi + h\right)}{2^n \sin\left(\dfrac{2^n\pi + h}{2^n}\right)} = \frac{\sin h}{2^n \sin\left(\pi + \dfrac{h}{2^n}\right)} = -\frac{\sin h}{2^n \sin\left(\dfrac{h}{2^n}\right)} \sim \frac{h}{-2^n} \times \frac{2^n}{h} \sim -1.$$

Quant au premier membre $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$, si l'on remplace t par $2^n\pi$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2^n\pi}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(2^{n-k}\pi\right) = -1.$$

Enfin si $t = 0$, par le même procédé, on voit que les deux membres de l'égalité valent 1. En conclusion, la formule est vraie pour t de la forme $2^n\pi$ et on peut écarter alors ces valeurs de t pour la démonstration par récurrence qui va suivre.

Nous allons reprendre le fil du sujet et montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la proposition P_n :

$$\text{« Pour tout } t > 0 \text{ tel que } t \not\equiv 0 \mod 2^n\pi, \text{ on a : } \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}. \text{ »}$$

• ***Initialisation***

Montrons P_1. Soit $t>0$ tel que $t \not\equiv 0 \mod (2\pi)$. Alors :

$$\frac{\sin(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Par ailleurs, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$. On a bien la proposition P_1.

• ***Transmission***

Supposons $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie. Soit $t>0$ tel que $t \not\equiv 0 \mod 2^k\pi$ pour tout k entier non nul. On a en particulier $t \not\equiv 0 \mod 2^n\pi$ et $t \not\equiv 0 \mod 2^{n+1}\pi$. Partons du membre de gauche de l''egalité à montrer.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right).$$

Puis, on applique P_n.

$$(1)\quad \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right).$$

On va s'occuper de $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$. On utilise la formule dite de duplication $\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en prenant ici $\theta = \dfrac{t}{2^n}$.

$$\sin\left(\tfrac{t}{2^n}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\tfrac{t}{2^{n+1}}\right).$$

On remplaçe dans (1).

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}.$$

C'est bien P_{n+1}.

Remarque pour le très très vaillant Montrons que pour tout $t>0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$.

Ici, aucune restriction sur t n'est nécessaire. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ la proposition P_n :

$$\text{«}\ \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right).\ \text{»}$$

Initialisation

Montrons P_1, en commencant par le membre de gauche.

$$\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Puis le membre de droite.

$$\frac{1}{2^{1-1}}\sum_{k=1}^{2^{1-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1}t\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a bien la propriété au rang 1.

Transmission

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et supposons que P_n soit vraie. Montrons P_{n+1}. Partons du membre de droite maintenant.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right).$$

On a utilisé P_n. Ce qui donne : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\right)$.

On transforme le produit $\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$ de deux cosinus en somme avec la formule rappelée dans le sujet.

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right) \text{ avec } a=\frac{2k-1}{2^n}t \text{ et } b=\frac{t}{2^{n+1}}.$$

Cela donne alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2(2k-1)+1}{2^{n+1}}t\right)+\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2(2k-1)-1}{2^{n+1}}t\right)\right).$$

On arrange un peu.

$$\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}t\right)+\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}t\right)\right).$$

On doit comparer le membre de droite avec $\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}t\right)$. On remarque que tous les entiers impairs de $[\![1,2^n-1]\!]$ (donc comprenant les extrémités de cet intervalle) s'écrivent $4k-1$ ou $4k-3$ avec $k\in[\![1,2^{n-2}]\!]$. En effet, pour $k=1$, $(4k-3,4k-1)=(1,3)$, pour $k=2$, $(4k-3,4k-1)=(5,7)$, etc., pour $k=2^{n-2}-1$, $(4k-3,4k-1)=(2^n-7,2^n-5)$ et pour $k=2^{n-2}$, $(4k-3,4k-1)=(2^n-3,2^n-1)$. On peut conclure.

$$\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}t\right).$$

II-2. Déduisons : $\displaystyle\frac{\sin(t)}{t}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$, pour tout $t>0$.

On va utiliser les deux questions précédentes.
On sait que pour tout $t>0$,

$$\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{\sin(t)}{2^n\sin(t/2^n)} \text{ et } \prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right).$$

Il reste : $\displaystyle\frac{\sin(t)}{2^n\sin(t/2^n)}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$.

Il reste à utiliser l'équivalent $\sin u\sim u$ quand u tend vers 0 (on prend ici $u=\frac{t}{2^n}$). Comme t est fixé, quand n tend vers $+\infty$, u tend bien vers 0.

$$\frac{\sin(t)}{2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}\sim\frac{\sin(t)}{2^n\times\frac{t}{2^n}}\sim\frac{\sin(t)}{t}.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(t)}{2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}=\frac{\sin(t)}{t}$. On a bien le résultat.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)=\frac{\sin(t)}{t}.$$

Remarque. On suppose $t>0$ mais si l'on suppose que t tend vers 0, $\dfrac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1 et $\displaystyle\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$ tend vers 1 aussi car $\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$ tend vers 1 pour tout k et on est ramené à

$\dfrac{1}{2^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} 1 = 1$. Et donc la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{2^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} 1$ reste 1. Ainsi, l'égalité de cette question reste valable.

Ensuite, si $t<0$, $t\mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $t\mapsto \dfrac{1}{2^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$ étant paires, on est ramené au cas $t>0$.
En conclusion, l'égalité peut être étendue à $t\in\mathbb{R}$ mais ce n'est pas demandé ici.

II-3. Montrons ici : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}$.

On sait d'après la question**Q6** que $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$. On applique l'égalit'e admise avec $x=1$.

$$F(1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-t}\,dt.$$

Il reste à transformer le second membre de cette dernière égalité.
Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-t}\,dt$ sont de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(\alpha t)\,e^{-tx}\,dt$ avec $\alpha=\frac{2k-1}{2^n}$ et $x=1$.
On a calculé ces intégrales (notées I_α) dans la partie I.

$$I_\alpha=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\cos(\alpha t)\,dt=\frac{x}{x^2+\alpha^2}.$$

Cela donne ici :

$$\forall k\in[\![1,2^{n-1}]\!]\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-t}\,dt=\frac{1}{1+\alpha^2}=\frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2+1}.$$

Il reste à sommer k de 1 à 2^{n-1}.

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2+1}=\lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}.$$

II-4. Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}$ en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.
L'idée est d'utiliser ici la formule, où ff est continue sur $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)=\int_0^1 f(t)\,dt.$$

C'est la somme de Riemann de f de pas (constant) 2^{n-1}, associée à la subdivision :

$$0=\frac{0}{2^{n-1}}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\frac{2}{2^{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{k}{2^{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}=1.$$

Il s'agit donc de transformer $2^{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}$ en $\dfrac{1}{2^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}}f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)$.

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}=2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{\frac{k^2}{2^{2n-2}}+1}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2+1}.$$

En posant $f(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$, on a bien :

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}h\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right).$$

Il suffit d'appliquer la formule de la limite d'une somme de Riemann.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} h\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)=\int_0^1 h(t)\,dt=[\arctan(t)]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

On a finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}=\frac{\pi}{4}$.

II-5. Montrons : $\displaystyle\left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|\leqslant\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}$, pour tout $k\in[\![0,\,2^{n-1}]\!]$ et pour tout n entier non nul.

Posons donc $k\in[\![0,\,2^{n-1}]\!]$ et mettons l'expression de gauche sous le même dénominateur.

$$\left|\tfrac{1}{4k^2+2^{2n}}-\tfrac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|=\left|\tfrac{((2k-1)^2+2^{2n})-(4k^2+2^{2n})}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})}\right|.$$

Puis, on remarque que le numérateur s'écrit $((2k-1)^2+2^{2n})-(4k^2+2^{2n})=-4k+1$.

$$\left|\tfrac{1}{4k^2+2^{2n}}-\tfrac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|=\left|\tfrac{-4k+1}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})}\right|=\frac{|-4k+1|}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})}.$$

Comparons cette dernière quantité et $\displaystyle\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}$. Occupons nous d'abord du dénominateur. Si $k\geqslant 1$, $2k-1\geqslant 1$ et $(2k-1)^2\geqslant 1$. Alors :

$$\forall k\in[\![1,\,2^{n-1}]\!],\ \left|\tfrac{1}{4k^2+2^{2n}}-\tfrac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|\leqslant\frac{|-4k+1|}{(4k^2+2^{2n})(1+2^{2n})}.$$

Puis il reste à comparer $|-4k+1|$ et $4\times 2^{n-1}+1$. Il suffit d'écrire :

$$\forall k\in[\![1,\,2^{n-1}]\!],\ |-4k+1|\leqslant 4k+1\leqslant 4\times 2^{n-1}+1.$$

(On a écarté le cas $k=0$ car on le traitera à part après.) On peut alors conclure dans le cas où $k\in[\![1,\,2^{n-1}]\!]$.

$$\left|\tfrac{1}{4k^2+2^{2n}}-\tfrac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|\leqslant\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}.$$

Dans le cas $k=0$, l'inégalité à montrer est :

$$\left|\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{1+2^{2n}}\right|\leqslant\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}}\times\frac{1}{2^{2n}}\Leftrightarrow\frac{1}{2^{2n}(1+2^{2n})}\leqslant\frac{4\times 2^{n-1}+1}{2^{2n}(1+2^{2n})}\times\frac{1}{2^{2n}}.$$

Comme $1\leqslant 4\times 2^{n-1}+1$, l'inégalité est prouvée. On peut conclure.

$$\forall k\in[\![0,\,2^{n-1}]\!],\ \left|\tfrac{1}{4k^2+2^{2n}}-\tfrac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|\leqslant\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}.$$

II-6. • Montrons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)=0$.

On commence par appliquer l'inégalité triangulaire.

$$\left|2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)\right|\leqslant 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|.$$

Puis, on utilise la question précédente.

$$\left|2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)\right|\leqslant 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{4\times 2^{n-1}+1}{(4k^2+2^{2n})(1+2^{2n})}.$$

Arrangeons le membre de droite de cette dernière égalité.

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{4\times 2^{n-1}+1}{(4k^2+2^{2n})(1+2^{2n})}=\frac{\left(4\cdot 2^{n-1}+1\right)}{1+2^{2n}}\times 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}.$$

On a alors une inégalité appelée (1).

$$(1)\quad \left|2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)\right|\leqslant\frac{\left(4\cdot 2^{n-1}+1\right)}{1+2^{2n}}\times 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}.$$

L'idée est de pouvoir utiliser le résultat de la question **3** : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}=\frac{\pi}{4}$.

Il faudrait connaître maintenant $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(4\cdot 2^{n-1}+1\right)}{1+2^{2n}}$. On raisonne par équivalents, quand n tend vers $+\infty$.

$$\frac{\left(4\cdot 2^{n-1}+1\right)}{1+2^{2n}}\sim\frac{2^{n+1}}{2^{2n}}\sim\frac{1}{2^{n-1}}.$$

On a notre limite.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(4\cdot 2^{n-1}+1\right)}{1+2^{2n}}=0.$$

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(4\cdot 2^{n-1}+1\right)}{1+2^{2n}}\times 2^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}=0.$

On reprend l'inégalité (1) et on fait tendre n vers $+\infty$. On en déduit (théorème des gendarmes) le résultat voulu.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)\right|=0\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)=0.$$

- Retrouvons maintenant le résultat de la question **3**.

On veut la limite quand n tend vers $+\infty$ de $2^{n+1}\sum\limits_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}$. Et on connait la limite quand n tend vers $+\infty$ de $2^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)$ et celle de $2^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}$. On doit faire le lien entre ces trois sommes.

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}=2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right).$$

On fait tendre n vers $+\infty$ dans cette nouvelle égalité. La première somme du second membre tend vers $\frac{\pi}{4}$ et la seconde somme du second membre tend vers 0. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}.$$

C'est bien **3**.