DL05

CORRECTION

Partie I

Constante d'Euler-Mascheroni

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geqslant 1$ par la relation :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}.$$

On pose pour tout $n \geqslant 1$, $w_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

1. Prouvons que, pour tout $p \geqslant 1$, $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
   Comme $\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p}$ alors :
   $$-\frac{1}{p} \leqslant -\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant -\frac{1}{p+1} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$
2. Établissons alors que (w_n) est une suite croissante.
   Pour $n \geqslant 1$, $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Donc (w_n) est croissante.
3. Montrons que cette suite converge vers un réel γ tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
   En utilisant la question 1,
   $$\forall p \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$
   Cela donne : $0 \leqslant w_n \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.
   Comme (w_n) est croissante et majorée par 1, elle converge vers un réel γ tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

4. Établissons que, pour tout $p \geqslant 1$, $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u}\, du$.
   $$\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u}\, du = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{p+u-p}{p+u}\, du = \frac{1}{p} \int_0^1 du - \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{p}{p+u}\, du = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{du}{p+u}.$$
   Or $\int_0^1 \frac{du}{p+u} = \int_p^{p+1} \frac{dv}{v}$ en posant $v = u + p$. Donc on a bien le résultat voulu.

5. Déduisons-en que pour tout $p \geqslant 2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$.

   Comme $p + u \leqslant p + 1$ pour $u \in [0, 1]$,
$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\,du \geqslant \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2p(p+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$
   De même, $p + u \geqslant p \geqslant p - 1$ pour tout $u \in [0, 1]$ et donc :
$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\,du \leqslant \frac{1}{p(p-1)}\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

6. On pose $r_n = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{p=n+1}^{N} u_p = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

   (a) Justifions que (r_n) existe.

   La somme de la série convergente $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est γ et donc on a pour tout $n \geqslant 1$, $w_n + r_n = \gamma$.

   Donc r_n existe.

   (b) Montrons que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}$.

   Utilisons la question 5. On a :
$$\forall p \geqslant n+1,\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{N}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} u_p \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{N}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$
   Et donc :
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}\right) \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} u_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right).$$
   On fait tendre N vers $+\infty$ et il reste :
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

   (c) On approche γ par w_n. Explicitons un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2}.

   Comme $|\gamma - w_n| = r_n$ et comme (r_n) tend vers 0, il suffit de prendre tout n tel que $1/(2n) \leqslant 10^{-2}$. Cela donne : $n \geqslant 50$. Donc $n = 50$ est la valeur minimale de n à choisir.

Partie II

Formule de James Stirling

D'après la partie I, on sait qu'il existe un réel γ, appelé **constante d'Euler-Mascheroni** telle que, quand n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

On pose de plus : $\forall\, n \geqslant 2$,

$$x_n = \int_{n-1}^{n} (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2}\, dt,\ y_n = -\ln n + \int_{n-1}^{n} \ln t\, dt.$$

Et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

1. Vérifions que $t \mapsto t\ln t - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln t$.
   On a immédiatement : $(t\ln t - t)' = \ln t$.
2. Montrons pour tout n supérieur ou égal à 2,
   $$\sum_{k=2}^{n} y_k = n\ln n - n + 1 - \ln(n!).$$
   On écrit :
   $$\sum_{k=2}^{n} y_k = \sum_{k=2}^{n} \left(-\ln k + \int_{k-1}^{k} \ln t\, dt\right) = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t\, dt - \sum_{k=2}^{n} \ln k.$$
   En utilisant la question 1, cela donne :
   $$\sum_{k=2}^{n} y_k = \sum_{k=2}^{n} [t\ln t - t]_{k-1}^{k} - \sum_{k=2}^{n} \ln k.$$
   Ce qui donne :
   $$\sum_{k=2}^{n} y_k = \sum_{k=2}^{n} (k\ln k - (k-1)\ln(k-1) - 1) - \sum_{k=2}^{n} \ln k.$$
   Et on reconnait une somme téléscopique,
   $$\sum_{k=2}^{n} y_k = n\ln n - \sum_{k=2}^{n} 1 - \sum_{k=2}^{n} \ln k = n\ln n - n + 1 - ln(n!).$$
3. Vérifions, en effectuant une intégration par parties, que, pour $n \geqslant 2$:
   $$y_n = -\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\frac{1}{t}\, dt.$$
   On va partir de l'intégrale d'arrivée car elle inspire plus que la forme initiale de y_n. On a :
   $$-\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\frac{1}{t}\, dt = \int_{n-1}^{n} \ln t\, dt + [-(t-n+1)\ln t]_{n-1}^{n}.$$
   (On a dérivé $t \mapsto -(t-n+1)$ et intégré $t \mapsto 1/t$.)
   Cela donne :
   $$-\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\frac{1}{t}\, dt = \int_{n-1}^{n} \ln t\, dt - \ln n = y_n.$$

Effectuons de nouveau une intégration par parties pour en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$y_n = -\frac{1}{2n} - \frac{x_n}{2}.$$

On intègre $t \mapsto -(t-n+1)$ et dérive $t \mapsto 1/t$.

$$-\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\frac{1}{t}\,dt = -\int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{2}\,\frac{1}{t^2}\,dt - \left[\frac{(t-n+1)^2}{2}\,\frac{1}{t}\right]_{n-1}^{n} = -\frac{x_n}{2} - \frac{1}{2n}.$$

4. Montrons que pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $x_p \leqslant \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}$.

   On remarque que $(t-p+1)^2$ est compris entre 0 et 1 pour tout $t \in [p-1,p]$. Alors, pour tout $p \geqslant 2$,

$$0 \leqslant x_p = \int_{p-1}^{p} \frac{(t-p+1)^2}{t^2}\,dt \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

   Alors pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{p=2}^{n} x_p \leqslant \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

   Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{p=2}^{n} x_p\right)_{n\geqslant 2}$ est majorée et comme elle est croissante car $x_p > 0$ pour tout $p \geqslant 2$, la suite $\left(\displaystyle\sum_{p=2}^{n} x_p\right)_{n\geqslant 2}$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.

5. Démontrons que, quand n tend vers $+\infty$:

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^{n} x_k\right) + o(1).$$

   On part de $y_n = -\dfrac{1}{2n} - \dfrac{x_n}{2}$. Puis, on fait des sommes de cette égalité pour k variant de 2 à n,

$$\sum_{k=2}^{n} y_k = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} x_k.$$

   Or, en utilisant la question 2 de cette partie,

$$-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} x_k = n\ln n - n + 1 - \ln n!.$$

   Cela s'écrit :

$$\ln n! = n\,\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} x_k.$$

   Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

   Donc (attention, la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ commence à $k=2$) :

$$\ln n! = n\,\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\left(\ln n + \gamma - 1 + o(1)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} x_k.$$

   Et finalement :

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^{n} x_k\right) + o(1).$$

6. En posant $K_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\gamma+\displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k\right)$, vérifions que
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}e^K$$
, où $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = K$, quand $n \to +\infty$.
On va exponentier comme l'on dit ! On part de la question précédente :
$$e^{\ln(n!)} = e^{n\ln n}e^{-n}e^{\frac{1}{2}\ln n}\exp\left(\frac{1}{2}\left(1+\gamma+\sum_{k=2}^{n} x_k\right)+o(1)\right).$$
En posant $K_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\gamma+\displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k\right)$, on commence par remarquer que comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k$ a une limite quand n tend vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = K$ existe.
On a alors :
$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{K_n+o(1))}.$$
Puis :
$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = e^{K_n+o(1))}.$$
Si l'on fait tendre n vers $+\infty$,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = e^K.$$
Donc :
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}e^K.$$
7. On veut déterminer K dans cette question.
   (a) En remarquant que $\sin^n x = \sin x \sin^{n-1} x$, déterminons par une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$.
   On a :
   $$I_n = \left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx.$$
   Comme $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, on arrange sous la forme :
   $$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$
   On obtient : $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$, relation valable pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Partons de $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, montrons par récurrence pour tout $p \in \mathbf{N}$,
   $$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\times\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$
   La proposition est vraie pour $p = 0$.
   Supposons le résultat vrai pour p donné. Alors :
   $$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+2-1}{2p+2}I_{2p} = \frac{2p+2-1}{2p+2}\times\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{2p+1}{2(p+1)}\times\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\times\frac{\pi}{2}.$$
   Or :
   $$\frac{2p+1}{2(p+1)}\times\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} = \frac{(2p+1)!}{2(p+1)(2^p p!)^2} = \frac{(2p+2)!}{2(p+1)2(p+1)(2^p p!)^2} = \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}.$$
   Ainsi :
   $$I_{2(p+1)} = \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\times\frac{\pi}{2}.$$
   C'est bien la relation à l'ordre $p+1$.
   De même, on montre l'autre relation en partant de $I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \dfrac{2p+3-1}{2p+3}I_{2p+1}$.

(c) Montrons que $I_{2p}I_{2p+1} \sim \dfrac{\pi}{4p}$ pour $p = +\infty$.

On utilise la question précédente :

$$I_{2p}I_{2p+1} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2p)!}{(2p+1)!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(2p+1)}.$$

Et donc :

$$I_{2p}I_{2p+1} \sim \frac{\pi}{4p}$$

quand p tend vers $+\infty$.

(d) Montrons que pour $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$I_n I_{n+1} \leqslant I_n^2 \leqslant I_n I_{n-1}.$$

On a clairement : $I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Il reste à mutiplier par le positif I_n et on a le résultat.

Déduisons-en un équivalent de I_n au voisinage de $n = +\infty$.

D'après la question précédente, $I_{2p}I_{2p+1} \sim \dfrac{\pi}{4p}$.

Et de façon similaire, $I_{2p-1}I_{2p} \sim \dfrac{\pi}{4p}$ (il suffit de prendre $p-1$ à la place de p).

Ce qui donne : $I_n I_{n+1} \sim \dfrac{\pi}{2n}$. Ainsi, quand n tend vers $+\infty$,

$$I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Et donc : $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

En particulier, $I_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

(e) Vérifions que $I_{2p} \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}e^K}$ au voisinage de $p = +\infty$.

On a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{(2^p p!)^2 2} \sim \frac{(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}e^K}{2^{2p}\left(p^p e^{-p}\sqrt{p}e^K\right)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2p}e^K}.$$

Or, d'après la question précédente, $I_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

Donc :

$$\frac{\pi}{\sqrt{2p}e^K} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}.$$

On en déduit : $e^K = \sqrt{2\pi}$.

(f) On voit immédiatement que lorsque $n \to +\infty$,

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On appelle ce résultat la **formule de Stirling**.

Partie III

Démonstration du théorème de Moivre-Laplace dans un cas particulier. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. ***Générateur aléatoire.***

On note, dans cette question et les suivantes, X une $v.a.r$ de Bernoulli prenant les valeurs -1 et 1 de façon équiprobable, c'est-à-dire que :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Démontrons que X est une **v**ariable aléatoire centrée réduite, c'est-à-dire que $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

En effet, $E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$.

Puis : $E(X^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = 1$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1$.

2. ***Somme d'épreuves élémentaires***.
Soit Y_n la *v.a.r* égale à la somme de $2n$ *v.a.r* X **indépendantes**.

   (a) Montrons que Y_n ne prend que les valeurs paires de $[\![-2n, 2n]\!]$.
   - S'il y a n valeurs 1 et n valeurs -1, $Y_n = 0$.
   - S'il y a $n-1$ valeurs 1 et $n+1$ valeurs -1, $Y_n = -2$.
   - S'il y a $n-2$ valeurs 1 et $n+2$ valeurs -1, $Y_n = -2 \times 2$.

   ...
   - S'il y a $n-k$ valeurs 1 et $n+k$ valeurs -1, $Y_n = -2 \times k$.

   ...
   - S'il y a 0 valeurs 1 et $2n$ valeurs -1, $Y_n = -2 \times n$.

   Puis on reprend avec $-Y_n$ qui donne une majorité de 1. On obtient $Y_n = 2 \times k$ avec k entier entre 0 et n. On a bien que des valeurs paires.

   (b) Dans le calcul de Y_n, soit R la *v.a.r* égale au nombre de fois où X vaut 1 et L la *v.a.r* égale au nombre de fois où X vaut -1.

      i. On a immédiatement :

$$R + L = 2n.$$

      Comme $Y_n = R - L$,

$$Y_n = R - (2n - R) = 2R - 2n.$$

      ii. La loi de probabilité de R est une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$. En effet, la loi de R est une succession de $2n$ lois de Bernoulli de valeur 1 si X vaut 1 et de valeur 0 si X vaut -1. Ces lois de Bernoulli ont pour paramètre 1/2.
      Comme $R \hookleftarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$,

$$E(R) = 2n \times \frac{1}{2} = n \text{ et } V(R) = 2n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

      iii. Pour $k \in [\![-n, n]\!]$,

$$P(Y_n = 2k) = P(2R = 2n + 2k) = P(R = n + k) = \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

   (c) Montrer que Y_n est symétrique par rapport Ã 0, c'est-à-dire :

$$\forall\, k \in [\![-n, n]\!],\ P(Y_n = -2k) = P(Y_n = 2k).$$

   On a en effet :

$$\forall\, k \in [\![-n, n]\!],\ P(Y_n = -2k) = \binom{2n}{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{2n-(n-k)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = P(Y_n = 2k).$$

   (d) Démontrons que Y_n est centrée (c'est-à-dire $E(Y_n) = 0$).
   On a :

$$E(Y_n) = E(2R - 2n) = 2E(R) - 2n = 2n - 2n = 0.$$

   (e) Calculons la variance $V(Y_n)$ et l'Ã©cart-type $\sigma(Y_n)$.
   On a :

$$V(Y_n) = 4V(R) = 4 \times \frac{n}{2} = 2n \text{ et donc } \sigma(Y_n) = \sqrt{2n}.$$

Comme $2n \neq 1$, la variable Y_n n'est jamais réduite.

3. ***Réduction de la variable aléatoire***.
   On pose :
   $$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ Z_n = \frac{Y_n}{\sqrt{2n}}.$$
   (a) Démontrons que Z_n est une variable aléatoire centrée réduite.
   On a : $E(Z_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}E(Y_n) = 0$ et $V(Z_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2 V(Y_n) = 1$.
   (b) On part de $Y_n(\Omega) = \{2k,\ k \in [\![-n,n]\!]\}$ et donc :
   $$Z_n(\Omega) = \left\{z_k = \frac{2k}{\sqrt{2n}},\ k \in [\![-n,n]\!]\right\}.$$
   (c) $\forall\, k \in [\![-n,n]\!]$,
   $$P(Z_n = z_k) = P\left(Z_n = \frac{2k}{\sqrt{2n}}\right) = P(Y_n = 2k) = \binom{2n}{n+k}2^{-2n}.$$

4. ***Histogramme*** L'histogramme de Z_n est un diagramme constitué de $2n+1$ bandes jointives centrées sur les valeurs de z_k et dont l'aire est égale à $P(Z_n = z_k)$. La largeur commune de ces bandes est égale Ã l'espace inter-valeurs de la variable Z_n. C'est l'évolution de ce diagramme lorsque n tend vers $+\infty$ qui va nous amener à la loi normale.
   On fait un dessin sans souci.
   On commence par graduer l'axe des abscisses en faisant apparaître z_{-n}, z_{-n+1}, ... z_{-1}, z_0, z_1, ... z_n.
   On crée des sous-intervalles centrés en z_k qui se touchent et les bandes ont des hauteurs variables, à calculer.
   La largeur de chaque bande est :
   $$z_n - z_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}(2n - (2n-2)) = \frac{2}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$
   Puis l'aire de la bande centrée en z_k est : $\dbinom{2n}{n+k}2^{-2n}$.
   Donc la hauteur de la bande centrée en z_k est :
   $$h(z_k) = \binom{2n}{n+k}2^{-2n} \times \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\binom{2n}{n+k}2^{-2n}.$$

5. ***Préparation au passage à la limite***
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (on sait que les Z_n sont symétriques par rapport à O).
   On veut créer une suite (x_n) d'éléments de $Z_n(\Omega)$ convergeant vers x.
   On pose :
   $$k_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\,x \right\rfloor \text{ et } x_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\,k_n.$$
   (a) Démontrons que $x_n \in Z_n(\Omega)$ pour tout n assez grand et en appliquant le théorème des Gendarmes que la suite (x_n) tend vers x.
   Les éléments de $Z_n(\Omega)$ sont de la forme $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}k$ avec $k \in [\![-n,n]\!]$.
   Déjà, a-t-on $k_n \in [\![-n,n]\!]$?
   k_n est positif et de plus si $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}x \leqslant n$ alors $k_n \leqslant n$ et donc si $x \leqslant \sqrt{2n}$. Ceci est vérifié dès que n est assez grand. Puis :
   $$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}x - 1 < k_n \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}x \Leftrightarrow x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}k_n \leqslant x.$$
   Donc si n tend vers $+\infty$, d'après le théorème des Gendarmes, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}k_n$ tend vers x.

(b) On a : $h(x_n) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2^{2n}}\dfrac{(2n)!}{(n+k_n)!(n-k_n)!}$ car $z_k = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}k$ et comme $x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}k_n$, en prenant k_n à la place de k.

(c) Démontrons que la limite du rapport $\dfrac{k_n^2}{n}$ quand n tend vers $+\infty$ est $\dfrac{x^2}{2}$.

On a : $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}x-1\right)^2 < \dfrac{k_n^2}{n} \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

Les deux membres extremes de la double inégalité tendent vers $\dfrac{x^2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

(d) Vérifions que $n+k_n$ et $n-k_n$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

On a : $k_n > \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}x-1$ et donc $n+k_n > \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}x-1+n$ quantité qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Puis $k_n \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}} \Rightarrow n-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}} \leqslant n-k_n$, quantité qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

6. ***Calcul de la limite***

(a) En utilisant la formule de Stirling établie en fin de partie II, montrons, quand n tend vers $+\infty$,

$$h(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(1-\dfrac{2k_n}{n+k_n}\right)^{k_n}}{\left(1-\dfrac{k_n^2}{n^2}\right)^n}.$$

Partons de la question 5-b, on a quand n tend vers $+\infty$,

$$h(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n+k_n)!(n-k_n)!}.$$

Et donc :

$$h(x_n) \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\frac{1}{2^{2n}}\frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{\left(\dfrac{n+k_n}{e}\right)^{n+k_n}\sqrt{2\pi(n+k_n)}\left(\dfrac{n-k_n}{e}\right)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}}.$$

Cela donne :

$$h(x_n) \sim \frac{\sqrt{n}\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{\sqrt{2}2^{2n}(n+k_n)^n(n+k_n)^{k_n+\frac{1}{2}}(n-k_n)^n(n-k_n)^{-k_n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.$$

Cela donne encore :

$$h(x_n) \sim \frac{n(2n)^{2n}(n-k_n)^{k_n}}{(n^2-k_n^2)^{\frac{1}{2}}(n+k_n)^n(n-k_n)^n(n+k_n)^{k_n}\sqrt{2\pi}}.$$

Ou encore :

$$h(x_n) \sim \frac{(n-k_n)^{k_n}}{\left(1-\dfrac{k_n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{k_n}{n}\right)^n\left(1-\dfrac{k_n}{n}\right)^n(n+k_n)^{k_n}\sqrt{2\pi}}.$$

Ce qui donne :

$$h(x_n) \sim \frac{\left(\dfrac{n-k_n}{n+k_n}\right)^{k_n}}{\left(1-\dfrac{k_n^2}{n^2}\right)^n\left(1-\dfrac{k_n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.$$

Or, la quantité $\left(1-\dfrac{k_n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il reste bien :

$$h(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(1-\dfrac{2k_n}{n+k_n}\right)^{k_n}}{\left(1-\dfrac{k_n^2}{n^2}\right)^n}.$$

(b) Posons :

$$A = \left(1 - \frac{2k_n}{n+k_n}\right)^{k_n} \text{ et } B = \left(1 - \frac{k_n^2}{n^2}\right)^n.$$

En utilisant $\ln(1-u) \sim -u$ quand u tend vers 0, calculons $\ln A$ et $\ln B$ puis leurs limites quand $n \to +\infty$.

On a :

$$\ln B = n \ln\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \sim -\frac{nk_n^2}{n^2} \sim -\frac{k_n^2}{n} \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} B = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Puis,

$$\ln A = k_n \ln\left(1 - \frac{2k_n}{n+k_n}\right).$$

Et quand n tend vers $+\infty$, comme $k_n = \dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{2k_n}{n+k_n} \sim \frac{2\dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}}{n + \dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}},$$

quantité qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$\ln A \sim -\frac{2\dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}}{n + \dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}} \sim -\frac{nx^2}{n+\sqrt{2}\sqrt{n}x} \sim -x^2.$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} A = \exp\left(-x^2\right)$.

Il reste :

$$\lim_{n\to+\infty} h(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2} - x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = g(x).$$

g est appelée la densité de probabilité de la loi normale $N(0,1)$. On dit que Z_n converge vers $N(0,1)$.