2TSI. DEVOIR LIBRE N°06

À rendre le 21 Janvier 2021

Ce problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes.

Étant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \qquad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$, on cherche donc à résoudre sur $]0, 1[$, l'équation

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0. \qquad (E_0)$$

Q25. Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Q26. Montrer que toute fonction constante sur $]0, 1[$ est solution de (E_0).

Q27. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\dfrac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x-1}$.

Q28. On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à :

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\right)z = 0. \qquad (E^\star)$$

Q29. Résoudre $(E^\star)$ sur $]0, 1[$.

Q30. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$.

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$

On se place dans le cas où $\mu \neq 0$.
Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q31. Justifier que y est de classe C^∞ sur un ensemble que vous préciserez.

Q32. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(16n^2-\mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n = 0.$

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q33. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad a_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}a_0.$

Q34. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Q35. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Q36. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, préciser le rayon de convergence de y.

Partie III - Étude d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.
Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $]-R, R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question **Q33** et R est le rayon de convergence obtenu à la question **Q36**.

Q37. À partir de la relation obtenue à la question **Q33**, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!}.$$

Q38. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1).$

Q39. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{-(4n)!}{4^{2n} \times ((2n)!)^2 \times (4n-1)}.$

Q40. En admettant la formule de Stirling : $n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$, montrer que $a_n \sim \dfrac{-1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}.$

Q41. Rappeler le rayon de convergence de ϕ et préciser la convergence de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Q42. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non-nulle f sur l'intervalle $]0, 1[$.