

2TSI. Devoir surveillé n°04

CORRECTION

Exercice 01

1. Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé. On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations (1) :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbf{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables. En utilisant les relations (1) et le fait que Φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et que Φ est symétrique, c'est-à-dire que $\Phi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}, \vec{X})$ pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs du plan, calculons $\Phi(2\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + 3\vec{j})$ en fonction de θ .

On développe $\Phi(2\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + 3\vec{j})$ par rapport à chacune des variables. On trouve :

$$\Phi(2\vec{i}, \vec{i}) + \Phi(2\vec{i}, 3\vec{j}) + \Phi(-\vec{j}, \vec{i}) + \Phi(-\vec{j}, 3\vec{j}).$$

Cela donne :

$$2\Phi(2\vec{i}, \vec{i}) + 6\Phi(\vec{i}, \vec{j}) - \Phi(\vec{i}, \vec{j}) - 3\Phi(\vec{j}, \vec{j}).$$

Ou encore :

$$2 + 5\Phi(\vec{i}, \vec{j}) - 3 = -1 + 5 \cos \theta.$$

2. On passe au cas général. Soient $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $\vec{Y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E . Exprimons $\Phi(\vec{X}, \vec{Y})$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ .

On utilise la bilinéarité de Φ et son caractère symétrique. Il vient

$$\begin{aligned} \Phi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j}, y_1\vec{i} + y_2\vec{j}) &= x_1y_1\Phi(\vec{i}, \vec{i}) + x_2y_2\Phi(\vec{j}, \vec{j}) + x_1y_2\Phi(\vec{i}, \vec{j}) + x_2y_1\Phi(\vec{j}, \vec{i}) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1) \cos \theta \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette expression matricielle peut s'avérer pratique.

3. Montrons que Φ est un produit scalaire sur E , c'est-à-dire que Φ en plus d'être bilinéaire symétrique est définie et positive.

Pour montrer que Φ est un produit scalaire, il reste à étudier $\Phi(\vec{X}, \vec{X})$.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{X}, \vec{X}) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \cos \theta = (|x_1| - |x_2|)^2 + 2|x_1x_2|(1 \pm \cos \theta) \\ &\geq (|x_1| - |x_2|)^2 + 2|x_1x_2|(1 - |\cos \theta|) \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, $\Phi(\vec{X}, \vec{X})$ étant la somme de deux quantités positives et l'hypothèse $0 < \theta < \pi$ assurant que $|\cos \theta| < 1$, elle est nulle si, et seulement si, $|x_1| = |x_2|$ et $|x_1x_2| = 0$, donc si, et seulement si $\vec{X} = \vec{0}$. Ainsi, Φ est bien un produit scalaire sur E . (On pouvait aussi écrire plus naturellement

$$\Phi(\vec{X}, \vec{X}) = (x_1 + x_2 \cos \theta)^2 + (1 - \cos^2 \theta)x_2^2.$$

4. • Soit $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, déterminons les composantes de $f(\vec{X})$.

$$f(\vec{X}) = x_1\vec{j} + x_2(-\vec{i} + 2 \cos \theta \vec{j}) = -x_2\vec{i} + (x_1 + 2 \cos \theta x_2)\vec{j}.$$

- Montrons que pour tout $\vec{X}$ de E , $\Phi(f(\vec{X}), f(\vec{X})) = \Phi(\vec{X}, \vec{X})$.

$$\begin{aligned}\Phi(f(\vec{X}), f(\vec{X})) &= (-x_2)^2 + (x_1 + 2\cos\theta x_2)^2 - 2x_2(x_1 + 2\cos\theta x_2)\cos\theta \\ &= x_1^2 + (1 + 4\cos^2\theta - 4\cos^2\theta)x_2^2 + (4 - 2)\cos\theta x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \cos\theta = \Phi(\vec{X}, \vec{X}).\end{aligned}$$

5. Déterminons un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt en orthonormalisant la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On écrit : $\begin{cases} \vec{V}_1 &= \vec{i} \\ \vec{V}_2 &= \vec{j} + a\vec{i} \end{cases}$ avec $\Phi(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0$. On écrit :

$$\Phi(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \Phi(\vec{i}, \vec{j}) + a\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \cos\theta + a = 0.$$

On en déduit que $a = -\cos\theta$. Ainsi $\vec{V}_2 = \vec{j} - \cos\theta \vec{i}$. Puis on a :

$$\Phi(\vec{V}_1, \vec{V}_1) = \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = 1.$$

Et il reste à développer :

$$\Phi(\vec{V}_2, \vec{V}_2) = \Phi(-\cos\theta \vec{i} + \vec{j}, -\cos\theta \vec{i} + \vec{j}).$$

On trouve :

$$\cos^2\theta \Phi(\vec{i}, \vec{i}) - \cos\theta \Phi(\vec{i}, \vec{j}) - \cos\theta \Phi(\vec{j}, \vec{i}) + \Phi(\vec{j}, \vec{j}).$$

Ou encore :

$$1 + \cos^2\theta - 2\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \|\vec{V}_2\|^2.$$

Comme $\theta \in]0, \pi[$, $1 - \cos^2\theta > 0$. Et donc :

$$\vec{k} = \frac{\vec{V}_2}{\|\vec{V}_2\|^2} = \frac{-\cos\theta \vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}} = \frac{-\cos\theta \vec{i} + \vec{j}}{\sin\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \vec{i} + \frac{1}{\sin\theta} \vec{j}.$$

6.a On pose : On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ 0 & \frac{1}{\sin\theta} \end{pmatrix}$. Montrons que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$.

Il suffit de faire $P^{-1}P = I_2$.

6.b Calculons $P^{-1}CP$ et déduisons en la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$.

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta/\sin\theta \\ 0 & 1/\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Et cette dernière matrice est la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{k})$.

Spécial 5/2 : Précisons la nature de f .

On a donc $Mat_{(\vec{i}, \vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et f est bien entendu la rotation d'angle θ .

Exercice 02

Si $m \in \mathbf{R}$ est fixé, on considère l'équation différentielle $(E_m) : y''(x) + mxy'(x) + y(x) = x^2$ et on note (H_m) son équation homogène associée.

PARTIE A. Étude du cas $m = 0$

1. Ici $y''(x) + y(x) = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ de solution $r = \pm i$. Donc :

$$\mathcal{S}_{(H_0)} = \{x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

2. Trouvons une solution particulière de l'équation différentielle (E_0) définie sur $\mathbf{R}$ de la forme $y_p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, où α et β sont des réels à déterminer.

Pour tout $x \in R$,

$$y_p''(x) + y_p(x) = 2 + x^2 + \alpha x + \beta = x^2 + \alpha x + \beta + 2 = x^2.$$

Donc $\alpha = 0$ et $\beta = -2$. Il reste : $y_p(x) = x^2 - 2$.

3. Dédudons en l'ensemble des solutions de (E_0) et l'unique solution $y : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ de (E_0) avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

On a :

$$\mathcal{S}_{(E_0)} = \{x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + x^2 - 2, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Puis si $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + x^2 - 2$ et $y'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x + 2x$, avec les conditions initiales, on a :

$$\lambda - 2 = 0 \text{ et } \mu = 1.$$

L'unique solution du problème d'Augustin Cauchy est :

$$x \mapsto 2 \cos x + \sin x + x^2 - 2.$$

PARTIE B. Étude du cas $m = 1$

1. On cherche les séries entières $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n x^n$ solutions de (H_1) avec $a_1 = 0$.

On part de l'équation : $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$. On se place dans $] -R, R[$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On remplace dans (H_1) .

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On fait un petit glissement d'indice.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $a_{n+2}(n+2)(n+1) + (n+1)a_n = 0$, c'est-à-dire $a_{n+2}(n+2) + a_n = 0$.

On a bien déjà pour $n \geq 1$, $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$. Puis pour $n = 0$, on a : $a_2 + a_0 = 0$ et donc $a_2 = -a_0$. On a bien :

$$\forall n \geq 0, a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.

Notons la proposition $(\mathcal{P}_n) : \ll a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0 \text{ et } a_{2n+1} = 0 \gg$.

- Initialisation : $a_0 = \frac{(-1)^0}{2^0 0!} a_0 = A_0$ et $a_1 = 0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
- Transmission : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie, alors :

$$\forall n \geq 0, a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = -\frac{a_{2n}}{2n+2} = -\frac{\frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0}{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} n! 2(n+1)} a_0 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)!} a_0.$$

Puis $a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = -\frac{a_{2n+1}}{2n+3} = 0$. On a bien $(\mathcal{P}_{n+1})$.

3. Donnons une expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en fonction de x et de a_0 .

Pour tout $x \in] -R, R[$, $y_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} a_0 x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}.$

Cela donne :

$$\forall x \in]-R, R[, y_p(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^k \frac{1}{k!} = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

PARTIE C. Existence d'une solution polynomiale non nulle

1. Soit $m \in \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m) . Montrons que $d \neq 0$ et que $m = -1/d$.

On a : $P'' + mXP' + P = 0$.

• Supposons $d \geq 1$. Alors $P = X^d + Q$, avec $\deg Q \leq d-1$.

Ainsi, $P' = dX^{d-1} + Q'$ avec $\deg Q' \leq d-2$ et donc $mXP' = mdX^d + mXQ'$ puis $P'' = d(d-1)X^{d-2} + Q''$ avec $\deg Q'' \leq d-3$. Ainsi $P'' + mXP' + P$ se transforme en :

$$(md+1)X^d + d(d-1)X^{d-2} + Q'' + mXQ' + Q.$$

On pose $Z = d(d-1)X^{d-2} + Q'' + mXQ' + Q$, il est clair que $\deg Z \leq d-1$. Comme $P'' + mXP' + P$ a pour seul destin d'être nul, nécessairement :

$$md+1=0 \Rightarrow m = -\frac{1}{d}.$$

• P est constant et donc $P'' + mXP' + P = 0$ implique que $P = 0$. C'est impossible. Donc le cas $d = 0$ est absurde.

2-a. On étudie ici le résultat réciproque. On fixe un entier naturel d non nul et on souhaite montrer que $(H_{-1/d})$ admet une solution polynomiale non nulle. On note $\mathbf{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d et l'application :

$$h : \mathbf{R}_d[X] \mapsto \mathbf{R}_d[X], P \mapsto h(P) = P'' - \frac{1}{d}XP' + P.$$

Montrons que pour tout $P \in \mathbf{R}_d[X]$, $\deg h(P) \leq d-1$.

On part de $P = a_dX^d + Q$, avec $\deg Q \leq d-1$. Alors :

$$P' = da_dX^{d-1} + Q' \Rightarrow -\frac{1}{d}XP' = -a_dX^d - \frac{1}{d}XQ'.$$

Ainsi, $h(P) = P'' - \frac{1}{d}XQ' + Q$ et donc $h(P)$ est une combinaison linéaire de polynômes de degré $\leq d-1$.

2-b. • Rappelons la dimension de $\mathbf{R}_d[X]$

On a (c'est du cours) $\dim \mathbf{R}_d[X] = d+1$.

• Montrons que h est un endomorphisme de $\mathbf{R}_d[X]$.

Il suffit de montrer que h est linéaire car $h(\mathbf{R}_d[X]) \subset \mathbf{R}_d[X]$ d'après la question précédente. Pour tout couple (P, R) de polynômes de $\mathbf{R}_d[X]$ et tout $a \in \mathbf{R}$,

$$h(P + aR) = (P + aR)'' - \frac{1}{d}X(P + aR)' + P + aR.$$

On développe.

$$h(P + aR) = P'' + aR'' - \frac{1}{d}XP' - \frac{a}{d}XR' + P + aR.$$

On a bien : $h(P + aR) = h(P) + ah(R)$.

2-c. Montrons que h n'est pas surjective. Est-elle injective ?

X^d n'a pas d'antécédent donc h n'est pas surjective.

D'après le théorème du rang, $\dim \mathbf{R}_d[X] = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h$. Donc comme $\dim \text{Im } h < \dim \mathbf{R}_d[X]$, $\dim \text{Ker } h \geq 1$. Ainsi, h n'est pas injective.

2-d. Déduisons en l'existence d'une solution polynomiale non nulle de $(H_{-1/d})$.

Il existe donc un polynôme non nul de $\mathbf{R}_d[X]$ appartenant à $\text{Ker } h$, c'est-à-dire qu'il existe donc un polynôme non nul de $\mathbf{R}_d[X]$ tel que $P'' - \frac{1}{d}XP' + P = 0$. C'est bien ce que l'on voulait. q.e.d

Exercice 03

1. On rappelle que la partie entière $\lfloor x \rfloor$ de $x \in \mathbf{R}$ est l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

• Pour tout $x \in \mathbf{R}$, exprimons $\lfloor x + 1 \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

On a :

$$n \leq x < n + 1 \Rightarrow n + 1 \leq x + 1 < n + 2.$$

Comme $n + 1$ et $n + 2$ sont des entiers consécutifs, $\lfloor x + 1 \rfloor = n + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$.

• Déduisons en que f est périodique de période 1.

Pour tout réel x ,

$$f(x + 1) = x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = f(x).$$

• Exprimons $f(x)$ pour $x \in [0, 1[$. Précisons $f(1)$.

Rapidement, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = x - 0 = x$. Enfin, $f(1) = 1 - \lfloor 1 \rfloor = 0$.

• Enfin, f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

f est clairement continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et en toute valeur $k \in \mathbf{Z}$, $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k) = 0$. Ainsi, f est continue à droite mais pas à gauche en tout point de $\mathbf{Z}$.

2. On note, si elle existe, $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x))$ la série de Joseph (Fourier)

de la fonction f .

• Calculons a_0 .

Ici $T = 1$. Alors :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

• Determinons pour tout $n \geq 1$, a_n .

On a : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$. Puis, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n t) dt = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi n t) dt.$$

Il reste à faire une unerlässliche (indispensable) intégration par parties.

$$2 \int_0^1 t \cos(2\pi n t) dt = - \int_0^1 \frac{2 \sin(2\pi n t)}{2\pi n} dt + \left[2t \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1.$$

C'est-à-dire :

$$2 \int_0^1 t \cos(2\pi n t) dt = - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi n t)}{\pi n} dt + 0 - 0.$$

Et enfin :

$$2 \int_0^1 t \cos(2\pi n t) dt = - \left[\frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi^2 n^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} = 0.$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$.

Warnung : Il ne faut pas en déduire que f est impaire (et en plus a_0 n'est pas nul).

3. Calculons les coefficients b_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n t) dt = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi n t) dt.$$

Il reste à faire notre intégration par parties.

$$2 \int_0^1 t \sin(2\pi nt) dt = \int_0^1 \frac{2 \cos(2\pi nt)}{2\pi n} dt + \left[-2t \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n} \right]_0^1.$$

C'est-à-dire :

$$2 \int_0^1 t \sin(2\pi nt) dt = \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n} \right]_0^1 - \frac{1}{\pi n} \cos(2\pi n) = \frac{-1}{\pi n}.$$

En conclusion, pour tout $n \geq 1$, $b_n = \frac{-1}{\pi n}$.

4. Montrons que la série de Fourier S_f de f est convergente en tout point $x \in \mathbf{R}$. Précisons la fonction vers laquelle elle converge sur $]0, 1[$.

Comme f est de classe C^1 par morceaux, d'après Dirichlet, on sait que $S_f(x)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Comme la restriction de f à $]0, 1[$ est continue,

$$\forall x \in]0, 1[, x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}.$$

5. On admet la convergence de la série $\sum_{p \in \mathbf{N}} u_p$ de terme général $u_p = \frac{(-1)^p}{2p+1}$. On note U sa somme, trouvons une relation entre U et $S_f(1/4)$ et calculons alors U .

Comme $\frac{1}{4} \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}.$$

Si n est pair, $n = 2p$ et

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi 2p}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0.$$

Si n est impair, $n = 2p + 1$ et

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi(2p+1)}{2}\right) = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p.$$

Alors :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} U$$

Alors :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi} U \Rightarrow U = \frac{\pi}{4}.$$

6. • Énonçons le théorème de Marc-antoine Parseval.

Si f est une fonction T périodique et continue par morceaux, pour tout a réel,

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

• Dédisons en la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On peut appliquer Marc-antoine Parseval car f est justement continue par morceaux.

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(0 + \frac{1}{\pi^2 n^2} \right).$$

Cela donne :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(0 + \frac{1}{\pi^2 n^2} \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = 2\pi^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$