Discrete random Variables

Exercice 01

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,2]\!]$.
On sait que $E(X)=1$ et $V(X)=\dfrac{1}{2}$. En déduire la loi de X.

Exercice 02

Donner l'expression des fonctions de répartition de la loi de Bernoulli de paramètre $2/3$ et de la loi géométrique de paramètre $3/4$.

Exercice 03

Guillaume est un $3/2$ de TSI2. Pour fêter son probable redoublement en $5/2$, il boit et revient ivre devant la porte de son studio. Il a 10 clés pour ouvrir la porte (une seule de ces clés l'ouvre). Il remet chaque clé dans le trousseau de clé après un essai infructueux (n'oublions pas qu'il est bourré !). Quel est le nombre moyen d'essais nécessaires pour ouvrir la porte ?

Exercice 04

Un élève surdoué de TSI2 passe la terrible épreuve de sport de Polytechnique. Il tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1,2,...,n,...$ et il a droit à un seul essai par hauteur. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres et que la probabilité de succès au n-ème saut est $1/n$ pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$. Il s'arrête au premier saut raté. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbf{N}^\star,\ P(X=n)=\dfrac{n}{(n+1)!}$.
2. Calculer $E(X+1)$. En déduire $E(X)$.

Exercice 05

Gauthier, élève de TSI2 qui s'ennuie, répète le lancer d'un dé (que l'on suppose équilibré) à 12 faces jusqu'à ce que le dé produise un résultat pair que l'on divise finalement par deux. La variable aléatoire X prend la valeur obtenue. X suit-elle la loi uniforme ?
Indication : soit k un entier de $[\![1,6]\!]$. On notera Y_k la v.a.r.d égale au rang d'apparition du numéro $2k$. On calculera $P(Y_k=n)$ et on remarquera que $P(X=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(Y_k=n)$.

Exercice 06

Pour une variable aléatoire réelle X telle que $X(\Omega)=\mathbf{Z}\setminus\{-1,0\}$, on pose :

$$\forall\, n\in\mathbf{Z}\setminus\{-1,0\},\ P(X=n)=\frac{1}{2n(n+1)}.$$

1. Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité pour X.
2. X est-elle d'espérance finie ?

Exercice 07

Soit X une *v.a.r* telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité f vérifie :
$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ f(n)=\dfrac{4}{n}f(n-1)$. Déterminer cette loi.

T.S.V.P →

Exercice 08

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n\,P(X>n)$.

En déduire que si X admet une espérance, alors : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

Montrer de même que si X admet une variance, alors : $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)P(X>k)$.

Indication : démarrer par $P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k)$, puis majorer $nP(X>n)$ par $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$, puis reconnaître dans ce majorant le reste d'ordre n d'une série convergente.
Procéder pour $E(X^2)$ comme pour $E(X)$.

Exercice 09

Léo, élève de TSI2, a l'esprit concours. Il veut se débarrasser de Max qui a des meilleures notes que lui. Il lui propose une balade en voiture (Léo est le chauffeur) et fait exprès de s'arréter régulièrement dans les endroits les plus désertiques. Léo a une chance sur cinq pour qu'après un tel arrêt, il arrive à repartir sans Max. Soit X la $v.a.r$ égale au nombre d'arrêts nécessaires pour que Léo puisse perdre Max dans la nature.

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité pour que Léo réussisse son coup au quatrième arrêt .
3. Quel est le nombre maximum d'arrêts que peut comporter un tel circuit pour que Max arrive indemne à destination dans la voiture de Léo avec une probabilité supérieure à 0.6 ?

Exercice 10

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$.
n désigne un entier strictement positif ; d'autre part, on pose $Z = \min(X,Y)$ et $q = 1-p$.

1. Calculer $P(X \geqslant n)$.
2. Calculer $P(Z \geqslant n)$, puis $P(Z=n)$. En déduire quelle loi suit la variable aléatoire Z.
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 11

On suppose que le nombre N de nouveaux nés d'une famille de rats suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque naissance, on suppose que la probabilité que le rejeton soit une femelle est $p \in]0,1[$ et celle que ce soit un mâle est $q = 1-p$ et que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de femelles par famille et Y celle du nombre de mâles.

1. On veut déterminer la loi conjointe du couple (N,X).
   Constater que pour tout entier k compris entre 0 et n,
   $$P_{(N=n)}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$
2. En utilisant la formule des probabilités composées, déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 12

1. On définit n *v.a.r* indépendantes $Y_1, \dots Y_n$, de même loi et possédant un moment d'ordre 2. Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$\forall a > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{n\,a^2},$$
où S_n désigne la somme $Y_1 + \dots + Y_n$.
2. On tire avec remise une boule parmi deux boules rouges et trois boules noires. Quand a-t-on au moins 95% de chance d'avoir une proportion de boules rouges qui est comprise entre 0.35 et 0.45 ?

Exercice 13

Surbooking Des études effectuées par une compagnie aérienne montrent qu'il y a une probabilité 0.05 qu'un passager ayant fait une réservation ne vienne pas à l'aéroport. Un étudiant admissible de TSI2 doit monter à Paris passer un oral. L'avion qu'il va prendre a
90 places et il a été vendu 94 billets. Quelle est la probabilité pour qu'il puisse y avoir un problème à l'embarquement ? (On suppose que les passagers sont indépendants les uns des autres).
On fera les calculs de deux manières, directement et en utilisant une approximation.

Exercice 14

On sait que parmi tous les élèves de prépa TSI, 1/1000 sont des génies (QI$>$ 140). On fait une étude dans plusieurs grands lycées, où l'effectif total en TSI est de 500 élèves.
1. Soit X le nombre de ces élèves qui sont des génies. Quelle est la loi de X ? Rappelez sa moyenne.
2. Par quelle loi au programme peut-on approcher X ? Dans la suite, on pourra faire les calculs avec la loi exacte ou utiliser son approximation.
3. On peut détecter les génies grâce à un test que passent les élèves.
Quelle est la probabilité qu'au moins un des 500 élèves soit finalement un génie ?
4. On suppose que l'on sait qu'il y a au moins un génie dans l'échantillon.
Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes soient des génies ?

Exercice 15

Par question, aucune, une ou deux assertions au plus sont vraies.

Question 01 Une *v.a.r* X suit la loi de Poisson de paramètre λ si pour tout $n \in \mathbf{N}$:
a) $P(X = n) = e^{\lambda}\dfrac{\lambda}{n}$. **b)** $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda}{n}$. **c)** $P(X = n) = e^{\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n}$. **d)** $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda}{n!}$.

Question 02 Si la *v.a.r* X suit la loi de Poisson de paramètre λ, alors :
a) son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$ sont égales.
b) son espérance est $E(X) = e^{-\lambda}$.
c) sa série génératrice est une série entière de rayon 1.
d) sa série génératrice est une série entière de rayon $+\infty$.

Question 03 On établit que :
a) si X et Y sont deux *v.a.r* indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $E(X + Y) = \lambda\mu$.
b) si X et Y sont deux *v.a.r* suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $E(X + Y) = \lambda + \mu$.
c) si P est une probabilité sur un espace probabilisable et si A et B sont deux événements alors
$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$
d) si P est une probabilité sur un espace probabilisable et si A et B sont deux événements alors
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Dans la suite, on suppose que la *v.a.r* X qui donne le nombre de candidats de la filière PSI qui vont échouer à leur Oral de Mathématiques dans un concours donné et pendant un certain laps de temps d'Oraux suit une loi de Poisson. En moyenne, n candidats ratent leur oral sur une période d'une heure.
Par ailleurs Y est une *v.a.r* indépendante de X définie par : $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}$.
On note enfin $Z = XY$.

Question 04 On peut alors dire que la probabilité :

a) pour que k candidats ratent leur oral dans un intervalle de temps T (exprimé en heures) est

$$e^{-nT}\frac{(nT)^k}{k!}.$$

b) pour que k candidats ratent leur oral dans un intervalle de temps T (exprimé en heures) est

$$e^{-T}\frac{T^k}{k!}.$$

c) pour qu'un seul candidat rate son oral dans un intervalle de temps $T = \dfrac{2}{n}$ est e^{-2}.

d) pour qu'un seul candidat rate son oral dans un intervalle de temps $T = \dfrac{2}{n}$ est $2e^{-2}$.

Question 05 La probabilité pour que au moins quatre candidats ratent leur oral dans un intervalle de temps $T = \dfrac{1}{n}$ est :

a) $\dfrac{1}{4}e^{-2}$. **b)** $1 - \dfrac{5}{4}e^{-2}$. **c)** $1 - \dfrac{8}{3}e^{-1}$. **d)** $\dfrac{5}{3}e^{-1}$.

On suppose dans la suite que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que p est la probabilité que X soit un nombre pair.

Question 06 Alors :

a) $p = \dfrac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$. **b)** $p = \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda}\right)$. **c)** $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. **d)** $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Question 07 La probabilité pour que Z soit un nombre pair est :

a) $\dfrac{p}{2}$. **b)** $p\lambda$. **c)** $\dfrac{p\lambda}{2}$. **d)** $\dfrac{p+1}{2}$.