Parametric curves

■ Revision : plane and space euclidian geometry

Ici, on propose de réviser le cours de TSI1 sur la géométrie euclidienne du plan et de l'espace au travers d'exercices issus directement ou dans l'esprit de vos principaux concours. C'est le bon endroit. En effet, un problème sur les arcs paramétrés commence souvent par une approche euclidienne du plan ou de l'espace.

Exercice 01

Calculer dans l'espace la distance de $A(0,0,1)$ au plan d'équation $x+y=1$ et à la droite passant par $B(1,0,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1,1)$.

Exercice 02

Déterminer dans le plan l'équation du cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon 2.
Comment déterminer une équation de la tangente en un point (x_0,y_0) de ce cercle ?

Exercice 03. CCP filière TSI

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(0,0,1)$ et de vecteur normal $\vec{u}=(1,1,1)$.
2. Déterminer la distance d de $M(0,1,0)$ à $\mathcal{P}$ puis la distance d' de M à $\mathcal{P}'$: $x+2y-z+1=0$.

Exercice 04. CCS filière TSI

On rapporte le plan au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On pose $t=\tan\dfrac{u}{2}$, où $u\in]-\pi,\pi[$. Vérifier que pour tout $t\in\mathbf{R}$, un tel u existe.
   Montrer : $\cos u=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin u=\dfrac{2t}{1+t^2}$.
2. Soit D_t : $(1-t^2)x+2ty=2+4t$ une droite du plan.
   (a) Déterminer un vecteur directeur de D_t.
   (b) Montrer qu'il existe un point P équidistant de toutes les droites D_t et le déterminer.
   Faire une interprétation géométrique.

Exercice 05. CCP filière TSI

Dans $\mathbf{R}^3$ muni du repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x-2y-z & = & 0 \end{array}\right.$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+2y+3z=0$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathscr{P}$ ne sont pas orthogonaux.
2. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles.
3. Montrer que $A(1,1,-1)\in\mathcal{D}$ et déterminer le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.
4. En déduire le projeté orthogonal de $\mathcal{D}$ sur $\mathscr{P}$.

T.S.V.P $\rightarrow$

■ Differentiability of vector fonctions

Exercice 06

Soit la fonction vectorielle $f\,:\,t \mapsto \begin{cases} \left(t^3 \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^3\right) & \text{si} \quad t \neq 0 \\ (0,0) & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.
De plus, f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$, de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbf{R}$?

Exercice 07

Soient $f : t \mapsto (t^2 + t, 2t + 1, 3 - 4t)$ et $g : t \mapsto (2 - t, t^2 - 2t, 4 - 3t^2)$.
Déterminer $t \mapsto (f.g)^{(3)}(t)$ et $t \mapsto (f \wedge g)^{(4)}(t)$.

Exercice 08

Soit un point mobile P, fonction deux fois dérivable de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^3$, et O un point fixe de $\mathbf{R}^3$. On suppose qu'à tout instant, l'accélération est colinéaire à $\overrightarrow{OP}$.

1. Calculer la dérivée de $\overrightarrow{OP} \wedge \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$.
2. On suppose qu'à l'instant initial la vitesse de P n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{OP}$.
   Montrer que la trajectoire de P est dans un plan passant par O.
3. Que peut-il se passer si la vitesse initiale est colinéaire à $\overrightarrow{OP}$?

■ Generality around parametric curves

Exercice 09

Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par $f : t \mapsto \left(\dfrac{1}{t+3}, \dfrac{1}{t-2}\right)$ sur $\mathbf{R} \setminus \{-3, 2\}$. Déterminer t pour que la tangente en $M(t)$ admette $\vec{i} + 4\vec{j}$ pour vecteur directeur.

Exercice 10

a étant un réel non nul, quelle est l'équation de la tangente à la courbe paramétrée définie par : $t \mapsto (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t)$ au point $M(t)$ lorsque ce point est régulier ?

Exercice 11. CCP, filière TSI

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ y - 2z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. Á l'aide de la (trop) célèbre formule $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, faire un paramétrage de $\mathcal{G}$.
2. En déduire une équation de la tangente à $\mathcal{G}$ en $\left(0, 1, \dfrac{1}{2}\right)$.
3. Reprendre la question précédente au point $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

■ Study and drawn of a parametric curve

Exercice 12

Déterminer les supports des arcs plans de $I \to \mathbf{R}^2$ suivants :

1. $I = \mathbf{R}$, $t \mapsto (2t-3, 3t+1)$. **2.** $I = [0, 2\pi[$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. **3.** $I = \mathbf{R}$, $t \mapsto \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$.

Exercice 13. CCP filière TSI

Étudier et tracer la courbe paramétrée : $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \\ y(t) & = & \cos t \end{array}\right.$.

Exercice 14

Étudier (symétries, tangentes particulières, asymptotes...) et tracé des arcs :

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$ **2.** $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^3}{1+3t} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+3t} \end{array}\right.$ **3.** $\left\{\begin{array}{l} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t + 2 \end{array}\right.$. **4.** $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos^3 t - \cos t \\ y(t) = [\sin(2t)]^2 \end{array}\right.$.

Exercice 15. Mines d'Albi, d'Alès, de Douai, de Nantes et ENSTA Bretagne

On considère l'arc paramétré : $t \mapsto \left(x(t) = \dfrac{3t}{t^3+1}, y(t) = \dfrac{3t^2}{t^3+1}\right)$.

1. Montrer que l'étude sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ peut se ramener à l'étude sur $]-1, 1]$.
2. Faire un développement limité généralisé à l'ordre 2 en $t = -1$ de $x(t) + y(t) + 1$. En déduire que la courbe admet une asymptote oblique. La courbe est-elle au dessus ou au dessous de cette asymptote ?
3. Tracer enfin le support de cet arc.

Exercice 16. CCP filière TSI

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on désigne par A le point de coordonnées $(-a, 0)$, a étant un réel strictement positif et par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon a. M étant un point du cercle, on désigne par P et Q ses projections sur $(0, \vec{i})$ et sur $(O, \vec{j})$. On désigne par N l'intersection des droites (PM) et (AQ). Déterminer les équations paramétriques et construire le lieu des points N quand M décrit le cercle $\mathcal{C}$ (on pourra utiliser comme paramètre l'angle t entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ (l'angle polaire).

Exercice 17

Soit R une constante réelle strictement positive.
Soit Γ la courbe admettant le paramétrage : $\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = R(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = R(\cos\theta - 1) \end{array}\right.$, pour θ décrivant $[-2\pi, 2\pi]$. On note $M(\theta)$ le point courant sur Γ.

1. Construire la courbe Γ.
2. Calculer la longueur $s(\theta)$ de l'arc de la courbe Γ d'origine le point O et d'extrémité $M(\theta)$.