

Un corrigé - Centrale 2015 I TSI

I Autour des matrices trigonales

I.A - Cas des matrices 3 x 3 et 4 x 4

I.A.1) Préliminaires

a) Soit $P_k : A^k = PB^kP^{-1}$.

P_0 est vraie car $A^0 = I_n = PI_nP^{-1} = PB^0P^{-1}$.

Supposons P_k vraie.

$$A^{k+1} = A^k A = PB^kP^{-1}PB^{-1} = PB^kBP^{-1} = PB^{k+1}P^{-1}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion finale : $\forall k \in \mathbb{N} \quad P_k$ est vraie .

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question précédente, il vient :

$$\sum_{k=0}^N a_k A^k = \sum_{k=0}^N a_k PB^kP^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^N a_k B^k \right) P^{-1}$$

en utilisant la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition.

c) Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\forall k \in \mathbb{N} \quad B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^N a_k B^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N a_k \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^N a_k \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

I.A.2) Diagonalisation d'une famille de matrices 3 x 3

a) A_3 est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Comme la première colonne et la troisième colonne de A_3 sont égales, A_3 n'est pas inversible donc A_3 a 0 pour valeur propre. La trace de A_3 est la somme de ses valeurs propres, or cette somme est nulle, donc les deux autres valeurs propres de A_3 sont opposées.

$$(1) \lambda \text{ valeur propre de } A_3 \Leftrightarrow \det(A_3 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda) = 0.$$

$$\text{Donc } (1) \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \sqrt{2} \text{ ou } \lambda = -\sqrt{2}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_3 - 0I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y & = & 0 \\ x + z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\ker(A_3 - 0I_3) = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$, de base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_3 - \sqrt{2}I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ z = x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker(A_3 - \sqrt{2}I_3) = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$, de base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En changeant $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ dans les calculs précédents, il vient :

$\ker(A_3 - (-\sqrt{2})I_3) = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$, de base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Contrôle : Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux (dans $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique) et effectivement ici les trois vecteurs formant bases des sous-espaces propres sont bien orthogonaux.

Soit L_3 , l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A_3 .

$$L_3 : \begin{cases} X & \mapsto A_3 X \\ \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

L_3 est représenté dans la base canonique de $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par A_3 et dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

par D_3 avec $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne :

$$A_3 = P_3 D_3 P_3^{-1} \text{ avec } P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : La théorie des matrices symétriques réelles dit que l'on peut trouver une matrice orthogonale Q_3 qui permette d'écrire $A_3 = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$. Une telle matrice Q_3 est obtenue en divisant les colonnes de la matrice P_3 par leurs normes.

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Dans ce cas } Q_3^{-1} = Q_3^T.$$

$$\text{b) } \mathcal{F} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \{aI_3 + bJ + cA_3, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

$\mathcal{F}$ est donc l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont combinaisons linéaires de I_3 , J et A_3 , qui est (par théorème) un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ noté $\text{Vect}(I_3, J, A_3)$. (I_3, J, A_3) est donc une famille génératrice de (F) . De plus :

$$aI_3 + bJ + cA_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc (I_3, J, A_3) est libre.

Conclusion : (I_3, J, A_3) est une base de $\mathcal{F}$.

- c) Les matrices de $\mathcal{F}$ sont symétriques réelles (réelles et égales à leurs transposées) donc sont diagonalisables.

- d) Soit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L_3 est l'endomorphisme canoniquement associé à A_3 .

$$L_3(E_1) = E_2, L_3(E_2) = E_1 + E_3, L_3(E_3) = E_2$$

$$\text{d'où } L_3^2(E_1) = E_1 + E_3, L_3^2(E_2) = 2E_2, L_3^2(E_3) = E_1 + E_3.$$

A_3^2 est la matrice de L_3^2 dans la base (E_1, E_2, E_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc :

$$A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + J.$$

- e) D'après la question précédente,

$$M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cA_3 = aI_3 + b(-I_3 + A_3^2) + cA_3 = (a - b)I_3 + cA_3 + bA_3^2.$$

- f) En utilisant les questions de I-A.1), que $A_3 = P_3 D_3 P_3^{-1}$ et la question précédente, il vient :

$$M(a, b, c) = P_3 ((a - b)I_3 + cD_3 + bD_3^2) P_3^{-1}. \text{ Soit } D(a, b, c) = (a - b)I_3 + cD_3 + bD_3^2.$$

$$D(a, b, c) = \begin{pmatrix} a - b & 0 & 0 \\ 0 & a - b + \sqrt{2}c + 2b & 0 \\ 0 & 0 & a - b - \sqrt{2}c + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & 0 & 0 \\ 0 & a + b + \sqrt{2}c & 0 \\ 0 & 0 & a + b - \sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

$M(a, b, c)$ et $D(a, b, c)$ sont semblables et ont donc les mêmes valeurs propres.

Les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont donc $a - b$, $a + b + \sqrt{2}c$, $a + b - \sqrt{2}c$.

Soit L l'endomorphisme canoniquement associé à $M(a, b, c)$. Dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, L est représenté par $M(a, b, c)$.

La nouvelle base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, a pour matrice de passage P_3 par rapport

à la base canonique. Donc $P_3^{-1} M(a, b, c) P_3$, c'est-à-dire $D(a, b, c)$, est la matrice de L dans la nouvelle base. Comme $D(a, b, c)$ est diagonale, cette nouvelle base est formée de vecteurs qui forment des bases de chaque sous-espace propre de L ou de $M(a, b, c)$.

Donc le sous-espace propre de $M(a, b, c)$ associé à $a - b$ a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Le sous-espace propre de $M(a, b, c)$ associé à $a + b + c\sqrt{2}$ a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Le sous-espace propre de $M(a, b, c)$ associé à $a + b - c\sqrt{2}$ a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

I.A.3) Application en physique

a) $M_3 = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix}.$

b) $M_3 = -2\omega_0^2 I_3 + \omega_0^2 A_3.$

- c) En exploitant I.A.2)f), il vient :

$$M_3 = P_3 D'_3 P_3^{-1} \text{ avec } D'_3 = D(-2\omega_0^2, 0, \omega_0^2) = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0^2 + \sqrt{2}\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_0^2 - \sqrt{2}\omega_0^2 \end{pmatrix}.$$

d) On pose $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = P_3 \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix}.$$

$$(S_1) \text{ s'écrit : } P_3 \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = P_3 D'_3 P_3^{-1} P_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = D'_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire } ((S_y)) : \begin{cases} \ddot{y}_1 = -2\omega_0^2 y_1 \\ \ddot{y}_2 = (-2\omega_0^2 + \sqrt{2}\omega_0^2) y_2 \\ \ddot{y}_3 = (-2\omega_0^2 - \sqrt{2}\omega_0^2) y_3 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } ((S_y)) : \begin{cases} \ddot{y}_1 = -r_1^2 \omega_0^2 y_1 \\ \ddot{y}_2 = -r_2^2 \omega_0^2 y_2 \\ \ddot{y}_3 = -r_3^2 \omega_0^2 y_3 \end{cases}.$$

$$\text{en posant } r_1 = \sqrt{2}, r_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ et } r_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$\text{Les solutions de } (S_y) \text{ en } t \text{ sont données par : } \begin{cases} y_1(t) = H_1 \cos(r_1 \omega_0 t) + K_1 \sin(r_1 \omega_0 t) \\ y_2(t) = H_2 \cos(r_2 \omega_0 t) + K_2 \sin(r_2 \omega_0 t) \\ y_3(t) = H_3 \cos(r_3 \omega_0 t) + K_3 \sin(r_3 \omega_0 t) \end{cases}.$$

Les constantes se calculent à partir des conditions initiales.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_3^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \dot{x}_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \\ \dot{y}_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 K_1 \\ r_2 K_2 \\ r_3 K_3 \end{pmatrix}.$$

Donc $K_1 = K_2 = K_3 = 0$.

$$P_3^{-1} \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{pmatrix} = P_3^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 + H_2 + H_3 \\ \sqrt{2}H_2 - \sqrt{2}H_3 \\ -H_1 + H_2 + H_3 \end{pmatrix} (*).$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (*1) & H_1 + H_2 + H_3 = x_{1m} \\ (*2) & -H_1 + H_2 + H_3 = x_{3m} \\ (*3) & \sqrt{2}(H_2 - H_3) = x_{2m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(*1) - (*2)}{2} & H_1 = \frac{x_{1m} - x_{3m}}{2} \\ \frac{(*1) + (*2)}{2} & H_2 + H_3 = \frac{x_{1m} + x_{3m}}{2} \\ \frac{(*3)}{\sqrt{2}} & H_2 - H_3 = \frac{\sqrt{2}x_{2m}}{2} \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} H_1 = \frac{x_{1m} - x_{3m}}{2} \\ H_2 = \frac{x_{1m} + \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \\ H_3 = \frac{x_{1m} - \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Les solutions de } (S_y) \text{ en } t \text{ sont données par : } \begin{cases} y_1(t) = \frac{x_{1m} - x_{3m}}{2} \cos(r_1 \omega_0 t) \\ y_2(t) = \frac{x_{1m} + \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \cos(r_2 \omega_0 t) \\ y_3(t) = \frac{x_{1m} - \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \cos(r_3 \omega_0 t) \end{cases}.$$

Les solutions de (S_1) en t sont donc données par :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{x_{1m} - x_{3m}}{2} \cos(r_1 \omega_0 t) + \frac{x_{1m} + \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \cos(r_2 \omega_0 t) + \frac{x_{1m} - \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \cos(r_3 \omega_0 t) \\ x_2(t) = \frac{x_{1m} + \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{2\sqrt{2}} \cos(r_2 \omega_0 t) - \frac{x_{1m} - \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{2\sqrt{2}} \cos(r_3 \omega_0 t) \\ x_3(t) = -\frac{x_{1m} - x_{3m}}{2} \cos(r_1 \omega_0 t) + \frac{x_{1m} + \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \cos(r_2 \omega_0 t) + \frac{x_{1m} - \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}}{4} \cos(r_3 \omega_0 t) \end{cases}$$

avec $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et $r_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

I.A.4) Application en chimie

a) (S_2) s'écrit : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$. Soit $M_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Trouver les ϵ tels que (S_2) ait des solutions $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$ non nulles revient à trouver les valeurs propres de

M_4 et pour ces valeurs là, les solutions non nulles de (S_4) sont les vecteurs propres de M_4 .

b) $M_4 = \alpha I_4 + \beta A_4$.

c) $M_4 = P_4(\alpha I_4 + \beta D_4)P_4^{-1} = P_4 D'_4 P_4^{-1}$ avec $D'_4 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta(1 - \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta(\varphi - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta\varphi \end{pmatrix}$.

M_4 et D'_4 sont semblables donc ont mêmes valeurs propres qui sont sur la diagonale de D'_4 .

Donc les valeurs de ϵ cherchées sont : $\alpha + \beta\varphi$, $\alpha + \beta(1 - \varphi)$, $\alpha + \beta(\varphi - 1)$, $\alpha - \beta\varphi$.

Les colonnes de P_4 forment les bases des sous-espaces propres de M_4 associées aux valeurs propres dans le même ordre sur la diagonale de D'_4 . (cf. démarche détaillée en I.A.2f)).

Pour $\epsilon = \alpha + \beta\varphi$, les solutions de (S_2) non nulles sont $\mu \begin{pmatrix} \varphi - 1 \\ 1 \\ 1 \\ \varphi - 1 \end{pmatrix}$, avec $\mu \neq 0$.

Pour $\epsilon = \alpha + \beta(1 - \varphi)$, les solutions de (S_2) non nulles sont $\mu \begin{pmatrix} \varphi \\ -1 \\ -1 \\ \varphi \end{pmatrix}$, avec $\mu \neq 0$.

Pour $\epsilon = \alpha + \beta(\varphi - 1)$, les solutions de (S_2) non nulles sont $\mu \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \\ -1 \\ -\varphi \end{pmatrix}$, avec $\mu \neq 0$.

Pour $\epsilon = \alpha - \beta\varphi$, les solutions de (S_2) non nulles sont $\mu \begin{pmatrix} \varphi - 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 - \varphi \end{pmatrix}$, avec $\mu \neq 0$.

d) Au lieu de $M_4[1, 4] = M[4, 1] = 0$, pour la molécule de cis-bitadiène où l'on tient compte de l'interaction entre le premier et le dernier atome de carbone, on écrit :

$$M[1, 4] = M[4, 1] = \beta.$$

I.B - Diagonalisation de A_n

I.B.1)

Soit $n \geq 4$. En développant le déterminant u_n suivant la première colonne, compte-tenu de la régularité de la matrice A_n (qui contient A_{n-1} et A_{n-2} comme "sous-matrices"), il vient $u_n = 2 \cos(\alpha) u_{n-1} - (-1) \det(m)$ avec m matrice obtenue en supprimant la première colonne et la deuxième ligne de A_n . Or cette matrice m n'a plus que -1 en haut à gauche comme seul terme non nul de sa première ligne. En développant suivant cette ligne, on obtient $\det(m) = -\det(m')$, avec m' obtenue en supprimant les deux premières colonnes et les deux premières lignes de A_n . Donc $\det(m') = u_{n-2}$.

Finalement (R) : $u_n = 2 \cos(\alpha) u_{n-1} - u_{n-2}$.

$u_3 = 2 \cos(\alpha) u_2 - 2 \cos(\alpha)$. Aussi, pour obtenir la même relation que ci-dessus avec $n = 3$, il suffit de définir $u_1 = 2 \cos(\alpha)$

$u_2 = 2 \cos(\alpha)(2 \cos(\alpha)) - 1 = 2 \cos(\alpha) u_1 - 1$. Aussi, pour obtenir la même relation que ci-dessus avec $n = 2$, il suffit de définir $u_0 = 1$.

I.B.2)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux. On associe à la relation (R) une équation caractéristique (qui s'obtient en cherchant les suites non nulles $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ solutions).

$(E_c) : \lambda^2 - 2 \cos(\alpha) \lambda - 1 = 0$. Les solutions de (E_c) sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$ (car $\Delta = -4 \sin^2(\alpha) = (2i \sin(\alpha))^2$).

Par théorème, on sait qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C_1(e^{i\alpha})^n + C_2(e^{-i\alpha})^n = C_1 e^{in\alpha} + C_2 e^{-in\alpha}.$$

$$\begin{cases} u_1 = 2 \cos(\alpha) = C_1 e^{i\alpha} + C_2 e^{-i\alpha} \\ u_0 = 1 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 \cos(\alpha) & e^{-i\alpha} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\alpha} & e^{-i\alpha} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cos(\alpha) - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i \sin(\alpha)} = \frac{e^{i\alpha}}{2i \sin(\alpha)} \\ C_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\alpha} & 2 \cos(\alpha) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\alpha} & e^{-i\alpha} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{e^{i\alpha} - 2 \cos(\alpha)}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} = \frac{e^{i\alpha} - (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{2i \sin(\alpha)} = \frac{-e^{-i\alpha}}{2i \sin(\alpha)} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{e^{i\alpha}}{2i \sin(\alpha)} e^{in\alpha} - \frac{e^{-i\alpha}}{2i \sin(\alpha)} e^{-in\alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha)} \left(\frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}}{2i} \right) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

L'hypothèse $\alpha \in]0, \pi[$ a été utile pour assurer que les dénominateurs des fractions précédentes ne sont pas nuls.

Autre façon de démontrer le résultat : La méthode précédente permet de comprendre comment obtenir la formule donnant u_n pour tout n tout en la démontrant. Comme le texte donnait la formule, il était possible de répondre à la question en démontrant que celle-ci était vraie. Voici une démonstration utilisant une récurrence "à deux niveaux".

$$\text{Soit } P_n : \begin{cases} u_n = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ u_{n+1} = \frac{\sin((n+2)\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{cases}.$$

$$P_0 \text{ est vraie car } \begin{cases} u_0 = 1 = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ u_1 = 2 \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{cases}.$$

Supposons P_n vraie.

On sait donc en particulier que $u_{n+1} = \frac{\sin((n+2)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

$$u_{n+2} = 2 \cos(\alpha) u_{n+1} - u_n = 2 \cos(\alpha) \frac{\sin((n+2)\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sin(\alpha)} (\sin((n+2)\alpha + \alpha) + \sin((n+2)\alpha - \alpha) - \sin((n+1)\alpha)) = \frac{\sin((n+3)\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion finale : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n$ est vraie

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

I.B.3)

Soit $n \geq 2$.

Compte-tenu du résultat de la question précédente, si α élément de $]0, \pi[$ vérifie $\sin((n+1)\alpha) = 0$ alors $u_n = \chi_n(2 \cos(\alpha)) = 0$ donc $2 \cos(\alpha)$ est une racine de χ_n donc une valeur propre de A_n .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin((n+1)\alpha) = 0 \\ \alpha \in]0, \pi[\end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{k\pi}{n+1} \\ k \in \mathbb{Z} / \frac{k\pi}{n+1} \in]0, \pi[\end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{k\pi}{n+1} \\ k \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right\}$$

Sur $]0, \pi[$ $\cos$ est une fonction strictement décroissante donc les valeurs de $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ sont toutes distinctes pour $k \in \{1, \dots, n\}$, ce qui fait n valeurs deux à deux distinctes.

Conclusion : A_n a n valeurs propres deux à deux distinctes qui sont les $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

I.B.4)

$$\text{Soit } X_\alpha = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha) \\ \vdots \\ \sin(n\alpha) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cos(\alpha) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 \cos(\alpha) & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 \cos(\alpha) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos(\alpha) \end{pmatrix} X_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) - \sin(2\alpha) \\ -\sin(\alpha) + 2 \cos(\alpha) \sin(2\alpha) - \sin(3\alpha) \\ \vdots \\ -\sin(m\alpha) + 2 \cos(\alpha) \sin((m+1)\alpha) - \sin((m+2)\alpha) \\ \vdots \\ -\sin((n-1)\alpha) + 2 \cos(\alpha) \sin(n\alpha) \end{pmatrix}$$

Soit $m \in \{0, \dots, n-1\}$.

$$-\sin(m\alpha) + 2 \cos(\alpha) \sin((m+1)\alpha) - \sin((m+2)\alpha) = \cdots$$

$$\cdots = -\sin(m\alpha) - \sin((m+2)\alpha) + \sin((m+1)\alpha + \alpha) + \sin((m+1)\alpha - \alpha) = 0$$

$$\text{Donc } (2 \cos(\alpha) I_n - A_n) X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin((n+1)\alpha) \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = \alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$, X_α est une colonne non nulle et $(2\cos(\alpha)I_n - A_n)X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

C'est-à-dire $A_n X_{\alpha_k} = 2\cos(\alpha_k)X_{\alpha_k}$.

Donc X_{α_k} est un vecteur propre de A_n associé à $2\cos(\alpha_k)$. Comme A_n a n valeurs propres deux à deux distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1. Donc pour k entier entre 1 et n , (X_{α_k}) est une base du sous-espace propre de A_n associé à $2\cos(\alpha_k)$.

I.C - Localisation des valeurs propres de certaines matrices tridiagonales

I.C.1)

- a) Si $k \neq 1$ et $k \neq n$ alors $bx_{k-1} - \lambda x_k + ax_{k+1} = 0$ donc $\lambda = a \frac{x_{k+1}}{x_k} + b \frac{x_{k-1}}{x_k}$.

En effet x_k ne peut être nul puisque X est non nul.

Comme $\frac{|x_{k-1}|}{|x_k|} \leq 1$ et $\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq 1$, comme $a > 0$ et $b > 0$, il vient :

$$|\lambda| \leq |a| \frac{|x_{k-1}|}{|x_k|} + |b| \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq a + b.$$

Si $k = 1$ alors $\lambda = a \frac{x_2}{x_1}$ donc $|\lambda| = |a| \frac{|x_2|}{|x_1|} \leq a \leq a + b$.

Si $k = n$ alors $\lambda = b \frac{x_{n-1}}{x_n}$ donc $|\lambda| = |b| \frac{|x_{n-1}|}{|x_n|} \leq b \leq a + b$.

- b) La question précédente permet d'affirmer que les valeurs propres de B sont entre $-a - b$ et $a + b$, donc appartiennent à I avec $I = [-a - b, a + b]$.

$$\text{sp}(B) \subset [-a - b, a + b].$$

I.C.2)

$$C_\lambda X = \begin{pmatrix} -\lambda x_1 + ax_2 \\ bx_1 - \lambda x_2 + ax_3 \\ \vdots \\ bx_k - \lambda x_{k+1} + ax_{k+2} \\ \vdots \\ bx_{n-1} - \lambda x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} bx_0 - \lambda x_1 + ax_2 = 0 \\ bx_1 - \lambda x_2 + ax_3 = 0 \\ \vdots \\ bx_k - \lambda x_{k+1} + ax_{k+2} = 0 \\ \vdots \\ bx_{n-1} - \lambda x_n + ax_{n+1} = 0 \end{cases}$$

en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$.

$$\text{Donc } C_\lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad bx_k - \lambda x_{k+1} + ax_{k+2} = 0.$$

I.C.3)

- a) Soit (E_c) l'équation caractéristique associée à (R) : $a\mu^2 - \lambda\mu + b = 0$.

$\Delta = \lambda^2 - 4ab > 0$ d'après l'hypothèse de la question. Donc (E_c) a deux solutions réelles distinctes μ_1 et μ_2 de même signe car leur produit est $\frac{b}{a} > 0$ et positives car de plus leur somme est $\frac{\lambda}{a} > 0$.

Les suites qui vérifient (R) sont : $(C_1\mu_1^n + C_2\mu_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Supposons $C_\lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $x_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$ pour

$k \in \{0, \dots, n+1\}$.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \text{ entraine que } \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\mu_1^{n+1} + C_2\mu_2^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système linéaire vaut $\mu_2^{n+1} - \mu_1^{n+1}$. Il est non nul car μ_1 et μ_2 sont distincts et strictement positifs.

Par suite le système a une seule solution et donc $C_1 = C_2 = 0$ et cela prouve que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

I.C.4)

a) (E_c) a une seule solution μ (non nulle) puisque dans cette question $\Delta = \lambda^2 - 4ab = 0$.

Les suites qui vérifient (R) sont : $(C_1\mu^n + C_2n\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Supposons $C_\lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $x_k = C_1\mu^k + C_2k\mu^k$ pour

$k \in \{0, \dots, n+1\}$.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \text{ entraine que } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1\mu^{n+1} + C_2(n+1)\mu^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Ce système a une seule solution, $C_1 = C_2 = 0$, et cela prouve que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

I.C.5)

Supposons $\lambda \in \text{sp}(B)$.

Il existe alors X non nul tel que $C_\lambda X$ soit nul. Or les questions I.C.3)b) et I.C.4)b) montrent que ce n'est pas possible si $\lambda^2 > 4ab$ ou si $\lambda^2 = 4ab$. Donc $\lambda^2 < 4ab$ donc $|\lambda| < 2\sqrt{ab}$.

Donc $\lambda \in]-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}[$.

Conclusion : $\text{sp}(B) \subset]-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}[$.

I.C.6)

$$2\sqrt{ab} \leq a + b \text{ car } a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Donc $] -2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}[\subset [-a - b, a + b]$.

Donc le résultat de la question I.C.5) est meilleur que celui de la question I.C.1).

II Séries de pile ou face

II.A - Étude des longueurs de séries

II.A.1)

a) $L_1(\Omega_n) = \{1, \dots, n\}$.

b) Cas où $m < n$.

$$(L_1 = m) = (P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1}).$$

$(L_1 = m)$ est la réunion de deux événements incompatibles. Donc la probabilité de $(L_1 = m)$ est la somme des probabilités de ces deux événements. Les lancers étant indépendants :

$$P(P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1}) = p^m q \text{ et } P(F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1}) = q^m p.$$

$$\text{Donc } P(L_1 = m) = p^m q + q^m p.$$

c) $(L_1 = n) = (P_1 \cap \dots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_n)$.

$$P(L_1 = n) = p^n + q^n.$$

$$d) \sum_{m=1}^n P(L_1 = m) = \sum_{m=1}^{n-1} p^m q + \sum_{m=1}^{n-1} q^m p + p^n + q^n.$$

$$\sum_{m=1}^n P(L_1 = m) = pq \frac{1 - p^{n-1}}{1 - p} + pq \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + p^n + q^n.$$

$$\sum_{m=1}^n P(L_1 = m) = p(1 - p^{n-1}) + q(1 - q^{n-1}) + pp^{n-1} + qq^{n-1} = p + q = 1.$$

II.A.2)

a) $L_2(\Omega_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

b) Cas où $m + k < n$.

$$(L_1 = m) \cap (L_2 = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1} \cap \dots \cap F_{m+k} \cap P_{m+k+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1} \cap \dots \cap P_{m+k} \cap F_{m+k+1}).$$

$$P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^m q^k p + q^m p^k q = p^{m+1} q^k + q^{m+1} p^k.$$

c) Cas où $m + k = n$.

$$(L_1 = m) \cap (L_2 = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1} \cap \dots \cap F_{m+k}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1} \cap \dots \cap P_{m+k}).$$

$$P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^m q^k + q^m p^k.$$

d) Les événements $(L_1 = m)$ pour m variant entre 1 et n forment un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(L_2 = k) = \sum_{m=1}^n P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)).$$

Si $m + k > n$ alors $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = 0$.

Si $m + k = n$, c'est-à-dire, si $m = n - k$ alors $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^m q^k + q^m p^k = p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k$.

Si $m + k < n$, c'est-à-dire $m < n - k$ alors $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^{m+1} q^k + q^{m+1} p^k$.

$$\text{D'où } P(L_2 = k) = \sum_{m=1}^{n-k-1} p^{m+1} q^k + q^{m+1} p^k + p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k.$$

$$P(L_2 = k) = p^2 q^k \frac{1 - p^{n-k-1}}{1 - p} + q^2 p^k \frac{1 - q^{n-k-1}}{1 - q} + p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k.$$

$$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} (1 - p^{n-k-1}) + q^2 p^{k-1} (1 - q^{n-k-1}) + p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k.$$

$$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} - p^{n-k+1} q^{k-1} + q^2 p^{k-1} - q^{n-k+1} p^{k-1} + p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k.$$

$$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1} + p^{n-k} q^{k-1} (-p + q) + q^{n-k} p^{k-1} (-q + p).$$

e) $P(L_2 = 0) = P(L_1 = n) = p^n + q^n$.

On peut vérifier que $\sum_{k=0}^{n-1} P(L_2 = k) = 1$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(L_2 = k) = p^2 \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^2 \frac{1 - p^{n-1}}{1 - p} + (-p + q) p^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q}{p}} + (-q + p) q^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1 - \frac{p}{q}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(L_2 = k) = p(1 - q^{n-1}) + q(1 - p^{n-1} - (p^{n-1} - q^{n-1})p - (q^{n-1} - p^{n-1})q).$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(L_2 = k) = p - pq^{n-1} + q - qp^{n-1} - p^n + pq^{n-1} - q^n + qp^{n-1} = p + q - p^n - q^n.$$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} P(L_2 = k) = p^n + q^n + p + q - p^n - q^n = p + q = 1.$

Ce qui précède fonctionne si $p \neq q$. Supposons $p = q = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(L_2 = k) = \sum_{k=1}^{n-1} p^k = p \frac{1 - p^{n-1}}{1 - p} = 1 - p^{n-1}.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(L_2 = k) = 2p^n + 1 - p^{n-1} = 1.$$

II.B - Étude du nombre de séries lors de n lancers

II.B.1)

$$N_1(\Omega_1) = \{1\}. P(N_1 = 1) = 1.$$

$$N_2(\Omega_2) = \{1, 2\}. P(N_2 = 1) = P((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) = p^2 + q^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(N_2 = 2) = P((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)) = pq + qp = 2pq = \frac{1}{2}. \text{ On vérifie que } p^2 + q^2 + 2pq = (p + q)^2 = 1.$$

$$N_3(\Omega_3) = \{1, 2, 3\}. P(N_3 = 1) = P((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)) = p^3 + q^3 = \frac{1}{4}.$$

$$P(N_3 = 2) = P((P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)) = 2p^2q + 2q^2p = \frac{1}{2}.$$

$$P(N_3 = 3) = P((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)) = p^2q + q^2p = \frac{1}{4}.$$

On vérifie que $p^3 + q^3 + 2p^2q + 2q^2p + p^2q + q^2p = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p + q)^3 = 1.$

$$E(N_1) = 1, E(N_2) = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, E(N_3) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 2.$$

II.B.2)

$$N_n(\Omega_n) = \{1, \dots, n\}. P(N_n = 1) = p^n + q^n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$P(N_n = n) = p^{E(\frac{n}{2})} q^{n-E(\frac{n}{2})} + q^{E(\frac{n}{2})} p^{n-E(\frac{n}{2})} = \frac{1}{2^{n-1}}. (E \text{ désigne juste là la partie entière d'un réel}).$$

II.B.3) Fonctions génératrices de N_n

a) Le théorème de transfert dit que si X est une variable aléatoire de valeurs distinctes x_k , k variant de 1 à p et f une fonction définie sur l'image de X alors $E(f(X)) = \sum_{k=1}^p f(x_k)P(X = x_k)$. Prenons $X = N_n$,

$x_k = k$, k variant de 1 à n et $f : x \mapsto s^x$. Il vient :

$$E(s^{N_n}) = E(f(X)) = \sum_{k=1}^n f(x_k)P(X = x_k) = \sum_{k=1}^n s^k P(N_n = k)$$

Conclusion : Pour $s \in [0, 1]$ $G_n(s) = E(s^{N_n})$.

b) $G'_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) k s^{k-1}$ donc $G'_n(1) = \sum_{k=1}^n k P(N_n = k) = E(N_n).$

Conclusion : $G'_n(1)$ est l'espérance de N_n .

- c) $(N_n = k) \cap P_n = ((N_n = k \cap P_n \cap P_{n-1}) \cup ((N_n = k \cap P_n \cap F_{n-1}))$, réunion de deux évènements incompatibles (P_{n-1} et F_{n-1} formant un système complet).

Donc $P((N_n = k) \cap P_n) = P((N_n = k \cap P_n \cap P_{n-1}) + P((N_n = k \cap P_n \cap F_{n-1}))$.

On a $(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1} = (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ parce que :

- Si $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}$ alors les deux derniers lancers dans w étant identiques, ils font partie de la même série. Donc avant le lancer n , il y a le même nombre de séries qu'après le lancer n donc $N_{n-1}(w) = k$, donc $w \in (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$.

- Réciproquement, si $w \in (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ alors les deux derniers lancers étant identiques, le nombre de séries ne changent pas entre le lancer $n-1$ et le lancer n , donc $X_n(w) = k$, donc $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}$.

On a $(N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1} = (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$ parce que :

- Si $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}$ alors les deux derniers lancers dans w étant différents, ils se créent une nouvelle série par le lancer n . Donc $N_{n-1}(w) = k-1$, donc $w \in (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$.

- Réciproquement, si $w \in (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$ alors les deux derniers lancers étant différents, le nombre de séries augmente de 1 entre le lancer $n-1$ et le lancer n , donc $X_n(w) = k$, donc $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}$.

On en tire que :

$$P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}) = P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) = P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1})P(P_n)$$

car les lancers sont indépendants.

De même :

$$P((N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}) = P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n) = P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})P(P_n)$$

$$\text{D'où } P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

On va utiliser la formule des probabilités totales en utilisant d'abord (F_n, P_n) comme système complet d'évènements puis (F_{n-1}, P_{n-1}) . En utilisant les résultats acquis de la question, il vient :

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) = \\ &= \left(\frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \right) \\ P(N_n = k) &= \frac{1}{2} (P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1})) + \dots \\ &= \frac{1}{2} (P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).$$

$$\text{d) Soit } n \geq 2. G_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k)s^k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1)s^k \right).$$

$$\text{Comme } P(N_{n-1} = n) = 0, \text{ on a } \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k)s^k = \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k = G_{n-1}(s).$$

$$\text{Comme } P(N_{n-1} = 0) = 0, \text{ on } \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1)s^k = \sum_{k=2}^n P(N_{n-1} = k-1)s^k =$$

$$= \sum_{j=1}^n P(N_{n-1} = j) s^{j+1} = s G_{n-1}(s).$$

$$\text{Donc } G_n(s) = \frac{1}{2} G_{n-1}(s) + \frac{1}{2} s G_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

$$G_1(s) = P(N_1 = 1) s = s.$$

$$(G_n(s))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1+s}{2}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad G_n(s) = s \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1}$$

e) Soit $n \geq 2$. Cette question demande de calculer $E(N_n)$ c'est-à-dire d'après II.B.3.b) de calculer $G'_n(1)$.

$$\text{D'après la question précédente, } G'_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} + s(n-1) \frac{1}{2} \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-2}.$$

$$G'_n(1) = 1 + (n-1) \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Remarque : Pour $n = 2$, on retrouve bien $E(N_2) = \frac{3}{2}$ et $E(N_3) = 2$ de la question II.B.1)