TSI2. Concours Blanc 2021

Épreuve de Mathématiques

Duré 4 heures. Les calculatrices sont interdites

La rigueur du raisonnement et la clarté seront prises en compte dans la notation. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Instructions propre à cette épreuve : elle possède trois problèmes indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 01

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k,\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n la matrice tridiagonale suivante :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $b_{k,l}$ de la matrice B_n vérifie donc :

- $b_{k,k+1} = -k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $b_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $b_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1,\, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

Enfin, pour $k \in [\![0, n]\!]$, **on note la fonction** $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto e^{i(2k-n)x}$**.**

Q1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de V_n.

Q2. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que la dérivée de f_k, notée f_k', vaut $-kf_{k-1}+(n-k)f_{k+1}$. Puis, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que f_k' appartient à V_n.
Indication : on montrera que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la dérivée de f_k s'exprime comme combinaison linéaire de certaines fonctions $f_0, ..., f_n$.
En déduire que : $\varphi_n : V_n \longrightarrow V_n,\ f \longmapsto \varphi_n(f) = f'$ définit un endomorphisme de V_n (ne pas oublier de montrer la linéarité) et déterminer sa matrice dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

Q3. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.

Q4. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad g_k \in V_n$.

Q5. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Q6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Q7. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\operatorname{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \text{ où pour tout } k \in [\![0,\, n]\!], \text{ on note } q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}.$$

$\boxed{\text{Problème 02}}$

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.

Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in [\![0,\, n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = P(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

Q1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, montrer que la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements.

Q2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$? (On distinguera les cas $j = 0$, $j = n$ et $j \in [\![1,\, n-1]\!]$.)

Q3. On pose $k \in \mathbb{N}$.

- Déterminer pour $l \in [\![0,\, n]\!] \setminus \{1\}$, $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,0})$ puis $P_{E_{k,1}}(E_{k+1,0})$.
- Déterminer de même, pour $l \in [\![0,\, n]\!] \setminus \{n-1\}$, $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,n})$ et $P_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n})$.
- Enfin, calculer pour tout $l \in [\![0,\, n]\!] \setminus \{j-1, j+1\}$, la probabilité $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})$ puis

montrer les égalités : $P_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \dfrac{n-j+1}{n}$ et $P_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \dfrac{j+1}{n}$.

Q4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(E_{k+1,0}) = \dfrac{1}{n}P(E_{k,1})$ et $P(E_{k+1,n}) = \dfrac{1}{n}P(E_{k,n-1})$.

Puis que : $\forall j \in [\![1,\, n-1]\!],\ P(E_{k+1,j}) = \dfrac{n-j+1}{n}P(E_{k,j-1}) + \dfrac{j+1}{n}P(E_{k,j+1})$.

Q5. On pose ici la matrice tridiagonale : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$.

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :
- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1,\, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n} A_n Z_k = Z_{k+1}$ et en déduire l'égalité : $Z_k = \dfrac{1}{n^k} A_n^k Z_0$.

Q6. On suppose ici qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2. Ainsi, chaque boule a la probabilité $1/2$ d'être placée à l'instant 0 dans l'urne U_1.

Déterminer la loi π de N_0, c'est-à-dire $P(N_0 = j)$ pour $j \in [\![0,\, n]\!]$.
Indication : on remarquera que N_0 est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes X_i, et pour i variant de 1 à n, X_i prend la valeur 1 si la boule numéro i est dans U_1 et la valeur 0 si la boule numéro i est dans U_2. Le paramètre commun de ces n variables de Bernoulli est facile à trouver.

Problème 03

Q1. Rappeler le développement limité de $u \mapsto \cos u$ et de $u \mapsto \ln(1-u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

Q2. En déduire la convergence de la série de terme général : $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)$.

Q3. On considère dans cette question la suite $(R_n)_{n\geqslant 2}$, de premier terme $R_2 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$R_n = R_{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

a. Justifier l'existence de $\ln R_k$ pour tout $k \geqslant 2$.

b. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$\sum_{k=4}^{n} (\ln R_k - \ln R_{k-1}) = \ln R_n - \ln R_3 = \sum_{k=4}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right).$$

c. La suite $(\ln R_n)_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente ?

d. Justifier l'existence de $R = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$.

On écrira, dans ce qui suit : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=3}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$.

Q4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$.

a. Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, de premier terme 1, i.e. : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

b. En déduire, pour tout t de $]0,1]$, l'expression de $\dfrac{1-(1-t)^n}{t}$ en fonction d'une somme.

c. Étudier la convergence de l'intégrale I_n.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q5. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{n(n+t)}\, dt$.

a. Calculer, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale u_n en fonction de n.
Indication : on remarquera que $t = n + t - n$.

b. Démontrer que $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$, quand n tend vers $+\infty$. En déduire la convergence de la série de terme général u_n.

c. Montrer que si $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
En déduire l'existence de : $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$.

Q6. On suppose que n est un entier naturel non nul et on pose à partir de cette question, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt.$$

On veut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ la proposition $(\mathcal{P}_n)$:

$$\text{« } \forall x > 0,\ G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \text{ »}$$

Dans cette question, on fixe donc x strictement positif.

a. Montrer que $G_n(x) = n^x \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, du$, en appliquant le bon changement de variable.

b. Calculer $G_1(x)$ et en déduire que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

c. Montrer, à partir d'une intégration par parties, que

$$G_{n+1}(x) = -\frac{n+1}{x} G_{n+1}(x) + \frac{(n+1)^{x+1}}{x\, n^x} G_n(x).$$

d. Montrer alors : $G_{n+1}(x) = \dfrac{(n+1)^{x+1}}{n^x(x+n+1)} G_n(x)$.
En déduire que si $(\mathcal{P}_n)$ est vraie alors $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Q7. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $\ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}$ pour $x > 0$ fixé quand k tend vers $+\infty$.
En déduire, pour tout réel $x > 0$ fixé, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$.

Q8. En déduire (en passant au logarithme), pour tout réel $x > 0$ fixé, la convergence de la suite v définie par :

$$\forall N \in \mathbb{N}^\star,\ v_N = \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \Bigg].$$

On posera alors : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} v_N = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right)$.

Q9. Montrer en utilisant la proposition $(\mathcal{P}_n)$ que, pour tout réel $x > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}}\right] = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}}\right].$$