Correction concours blanc Math 2021

Probleme 01

Q1. • Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

Montrons que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

On considère $n+1$ scalaires $a_0, \ldots, a_n$ tels que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f_k = 0$. Traduisons cela par les images par x.

$$(E_1)\ \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad a_0(\sin(x))^n + a_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + a_n(\cos(x))^n = 0.$$

Si l'on applique (E_1) avec $x = 0$, on obtient : $\alpha_n = 0$. L'égalité (E_1) devient (2).

$$(2)\ \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad a_0(\sin(x))^n + a_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + a_{n-1}\sin(x)\cos^{n-1}(x) = 0.$$

On peut se restreindre à $x \neq k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On divise alors par $\sin x$ et on obtient les égalités (E_2).

$$(E_2)\ \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}, \quad a_0(\sin(x))^{n-1} + a_1(\sin(x))^{n-2}\cos(x) + \cdots + a_{n-2}\sin x \cos^{n-2}(x) + a_{n-1}\cos^{n-1}(x) = 0$$
$$\text{et } a_n = 0.$$

On ne peut pas prendre encore $x = 0$ car $0 \in \pi\mathbb{Z}$ mais comme la fonction

$$x \mapsto a_0(\sin(x))^{n-1} + a_1(\sin(x))^{n-2}\cos(x) + \cdots + a_{n-2}\sin x\cos^{n-2}(x) + a_{n-1}\cos^{n-1}(x)$$

est continue, on peut faire tendre x vers 0^+ dans (E_2). On obtient :

$$a_{n-1} = 0.$$

Ce qui donne l'égalité (3) pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$(3)\ \ a_0(\sin(x))^{n-1} + a_1(\sin(x))^{n-2}\cos(x) + \cdots + a_{n-2}\sin x\cos^{n-2}(x) = 0.$$

On peut diviser par $\sin x$. On obtient (E_3) pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

$$(E_3)\ \ a_0(\sin(x))^{n-2} + a_1(\sin(x))^{n-3}\cos(x) + \cdots + a_{n-3}\sin x\cos^{n-3}(x) + a_{n-2}\cos^{n-2}(x) = 0 \text{ et}$$
$$a_{n-1} = a_n = 0.$$

Nous allons donc continuer par récurrence descendante.
On suppose les égalités (E_p, où p est un entier entre 2 et $n-1$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$(E_p)\ \ a_0(\sin(x))^{n-2} + a_1(\sin(x))^{n-3}\cos(x) + \cdots + a_{n-p}\sin x\cos^{n-p}(x) + a_{n-(p-1)}\cos^{n-(p-1)}(x) = 0 \text{ et}$$
$$a_{n-(p-2)} = a_{n-(p-3)} = \ldots = a_n = 0.$$

On fait tendre x vers 0^+ dans (E_p), justifié par l'argument de la continuité de

$$x \mapsto a_0(\sin(x))^{n-2} + a_1(\sin(x))^{n-3}\cos(x) + \cdots + a_{n-p}\sin x\cos^{n-p}(x) + a_{n-(p-1)}\cos^{n-(p-1)}(x).$$

On obtient :

$$a_{n-(p-1)} = 0.$$

On en déduit l'égalité (p).

$$(p)\ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad a_0(\sin(x))^{n-2} + a_1(\sin(x))^{n-3}\cos(x) + \cdots + a_{n-p}\sin x\cos^{n-p}(x) = 0.$$

On divise par $\sin x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad a_0(\sin(x))^{n-3} + a_1(\sin(x))^{n-4}\cos(x) + \cdots + a_{n-p}\cos^{n-p}(x) = 0.$$

Et on a bien (E_{p+1}). Pour tout x $\in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

(E_{p+1}) $a_0(\sin(x))^{n-2} + a_1(\sin(x))^{n-3}\cos(x) + \cdots + a_{n-p}\sin x\cos^{n-p}(x) + a_{n-(p-1)}\cos^{n-(p-1)}(x) = 0$ et
$$a_{n-(p-1)} = a_{n-(p-2)} = ... = a_n = 0.$$

Ainsi de suite, on aboutit à (E_{n+2}) qui donne : $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$.
En conclusion, on obtient la nullité de tous les scalaires a_0, ..., a_n, et donc la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

- On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

Déterminons maintenant sa dimension.

Il est clair que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ engendre V_n, et xomme elle est libre, on en déduit que c'est une base de V_n. La dimension de V_n est le cardinal de cette famille.

$$\mathsf{dim}\,(V_n) = \mathrm{card}\,((f_0, \ldots, f_n)) = n + 1.$$

Q2. • Pour $k \in [\![0,\, n]\!]$, montrons que $f_k' \in V_n$.
Distinguons les cas $k = 0$ et $k = n$ des cas où $k \in [\![1,\, n-1]\!]$.
Si $k = 0$, alors $f_0(x) = \sin^n(x)$ et donc sa dérivée $f_0'(x) = n\sin^{n-1}(x)\ \cos(x)$. On remarque que $f_0' = nf_1$ et donc $f_0' \in V_n$.
Si $k = n$ alors $f_n(x) = \cos^n(x)$ et donc sa dérivée $f_n'(x) = -n\cos^{n-1}(x)\sin(x)$. On remarque que $f_n' = -nf_{n-1}(x)$ et donc $f_n' \in V_n$.
Pour maintenant $k \in [\![1,\, n-1]\!]$, on écrit :

$$f_k'(x) = -k\sin(x)\ \cos^{k-1}(x)\ \sin^{n-k}(x) + \cos^k(x)\,(n-k)\cos(x)\ \sin^{n-k-1}(x).$$

Cela s'arrange : $f_k'(x) = -k\cos^{k-1}(x)\sin^{n-(k-1)}(x) + (n-k)\cos^{k+1}(x)\ \sin^{n-(k+1)}(x)$.
Il reste à remarquer que :

$$f_k'(x) = -kf_{k-1}(x) + (n-k)f_{k+1}(x).$$

L'écriture est bien licite car k ne vaut ni 0 ni n. Et comme f_k' est une combinaison linéaire de vecteurs de V_n, f_k' appartient bien à V_n.

- $\varphi_n : V_n \longrightarrow V_n$, $f \longmapsto \varphi_n(f) = f'$ définit bien un endomorphisme de V_n car φ_n est d'une part bien linéaire ($\varphi_n(f + ag) = \varphi_n(f) + a\varphi_n(g)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de fonctions dérivables (f, g)) et d'autre part, comme les images par φ_n des éléments $f_0, ..., f_n$ de la base de V_n sont des éléments de V_n, l'image de V_n par φ_n est inclus dans V_n.

On peut résumer par :

$$\varphi_n(f_0) = nf_1, \quad \forall k \in [\![1,\, n-1]\!],\ \varphi_n(f_k) = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1}, \quad \varphi_n(f_n) = -nf_{n-1}.$$

- La matrice de φ_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est construite colonne par colonne. Chaque colonne correspond aux composantes des dérivées des vecteurs de cette base exprimés dans cette base.

On retrouve bien la matrice $B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q3. Pour $k \in [\![0,\, n]\!]$, on pose $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.
Pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$, on part du second membre en utilisant la formule de Moivre pour tout x réel.

$$(\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k} = \left(e^{ix}\right)^k \left(e^{-ix}\right)^{n-k} = e^{ikx}e^{i(k-n)x} = e^{i(2k-n)x} = g_k(x).$$

Q4. On veut ici en déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\, k \in [\![0,\, n]\!], \quad g_k \in V_n$.
Posons donc $k \in [\![0,\, n]\!]$ et prenons la forme de g_k trouvée à la question précédente.
On travaille pour un x fixé dans $\mathbb{R}$.

$$g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k}.$$

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\cos(x))^j (i\sin(x))^{k-j} \cdot \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} (\cos(x))^l (-i\sin(x))^{n-k-l}.$$

Les deux sommes sont indépendantes et on peut regrouper en une double somme.

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} i^{n-j-l} \binom{k}{j}\binom{n-k}{l} (\cos(x))^{l+j}(\sin(x))^{n-(j+l)}.$$

Puis, montrer que $g_k \in V_n$ revient à montrer que g_k est une combinaison linéaire des fonctions f_j pour j variant de 0 à n. Le groupement $(\cos(x))^{l+j}(\sin(x))^{n-(j+l)}$ correspond à $f_{l+j}(x)$.

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} i^{n-j-l} \binom{k}{j}\binom{n-k}{l} f_{l+j}(x).$$

Or, comme $j \in [\![0,\, k]\!]$ et $p \in [\![0,\, n-k]\!]$ alors $l + j \in [\![0,\, n]\!]$. On peut conclure.

$$g_k \in V_n.$$

Q5. • Pour $k \in [\![0,\, n]\!]$, on a :

$$g_k'(x) = \left(e^{i(2k-n)x}\right)' = i(2k-n)\, e^{i(2k-n)x} = i(2k-n) g_k(x).$$

• Déduisons en que φ_n est diagonalisable, en donnant la liste des valeurs propres complexes de φ_n et les espaces propres correspondants.
Déjà, on remarque que pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$,

$$\varphi_n(g_k) = i(2k-n)g_k.$$

De plus, g_k est une fonction non nulle. On peut donc dire que pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$, g_k est un vecteur propre de φ_n, associé à la valeur propre $i(2k-n)$. Comme $k \neq k' \Rightarrow i(2k-n) \neq i(2k'-n)$, , $\{i(2k-n),\, k \in [\![0,\, n]\!]\}$ est un ensemble de $n+1$ valeurs propres distinctes de ϕ_n. Par ailleurs, ϕ_n est un endomorphisme de V_n, espace vectoriel de dimension $n+1$. Donc ϕ_n a exactement $n+1$ valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k-n),\, k \in [\![0,\, n]\!]\}.$$

Comme il y a $n+1$ sous-espaces propres et que la somme de leurs dimensions est égale à $\dim(V_n) = n+1$, les sous-espaces propres de φ_n sont des droites vectorielles (dimension 1). Il est clair que g_k est un vecteur propre associé à $i(2k-n)$ pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$. On peut résumer par :

$$\forall k \in [\![0,\, n]\!],\ \mathrm{Ker}\left(\varphi_n - i(2k-n)\mathrm{Id}_{V_n}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(g_k\right).$$

Q6. Déterminons pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est un automorphisme de V_n ?

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Et comme φ_n est un endomorphisme défini sur V_n qui est un espace vectoriel de dimension finie, on sait d'après le cours que ϕ_n est un automorphisme si et seulement s'il est injectif. Cela équivaut à dire que $\operatorname{Ker}\phi_n$ est réduit au vecteur nul et donc si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de ϕ_n. Comme le spectre de ϕ_n est $\{i(2k-n),\ k \in [\![0,\ n]\!]\}$, $i(2k-n)$ est nul pour $n = 2k$, avec $k \in [\![0,\ n]\!]$. Donc n est nécessairement pair. Réciproquement si n est pair, pour $k = n/2$, $i(2k-n) = 0$ et donc 0 est une valeur propre de ϕ_n. En conclusion, 0 est une valeur propre de φ_n si et seulement si n est un entier pair. Et 0 n'est pas une valeur propre, donc ϕ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si n est un entier impair.

Q7. • Écrivons la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$.

On continue le travail fait à la question **Q4.** Partons de la formule établie à cette question.
Travaillons pour x fixé dans $\mathbb{R}$.

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} i^{n-j-l} \binom{k}{j} \binom{n-k}{l} f_{l+j}(x).$$

On applique avec $k = n$.

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{0} (-1)^{l} i^{n-j-l} \binom{k}{j} \binom{0}{l} f_{l+j}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{0} i^{n-j} \binom{k}{j} f_j(x).$$

Ainsi : $g_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} i^{n-j} \binom{k}{j} f_j(x)$.

• Montrons que : $\operatorname{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, où pour tout $k \in [\![0,\ n]\!]$, $q_k = i^{n-k}\dbinom{n}{k}$.

On sait d'après plus haut que B_n étant la matrice de ϕ_n dans $(f_0, ..., f_n)$, et comme le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\phi_n - i(2k-n)Id_{V_n})$ est l'espace propre de ϕ_n associé à $i(2k-n)$, de base (g_k) pour tout k entier entre 0 et n, dans le cas $k = n$, $\operatorname{Ker}(\phi_n - i(2n-n)Id_{V_n}) = \operatorname{Ker}(\phi_n - inId_{V_n})$ est l'espace propre de ϕ_n associé à in, de base (g_n). Donc $\operatorname{Ker}(B_n - inI_{n+1})$ est l'espace propre de B_n associé à in, de base (G_n), qui est le vecteur colonne ayant les composantes de g_n dans la base $(f_0, ..., f_n)$. Il reste à déterminer G_n.

Comme $g_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} i^{n-j}\binom{n}{j} f_j$, la matrice colonne des composantes de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ est :

$$G_n = \begin{pmatrix} i^n\binom{n}{0} \\ i^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots \\ i^{n-j}\binom{n}{j} \\ \vdots \\ i^0\binom{n}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \text{ avec pour tout } j \in [\![0,\ n]\!],\ q_j = i^{n-j}\binom{n}{j}.$$

On a bien le résultat : $\operatorname{Ker}(B_n - in\mathrm{I}_{n+1}) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(G_n) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right)$.

Probleme 02

Q1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n})$?

On rappelle que pour k fixé entier, $l \in [\![0,\, n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$, où N_k est la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k. D'après le protocole, à l'instant k, l'urne U_1 contient un nombre de boules compris entre 0 et n, de plus $(N_k = l)$ est l'événement : « l'urne U_1 contient l boules à l'instant k.

Donc :

$$\Omega = \bigcup_{l=0}^{n} (N_k = l) = \bigcup_{l=0}^{n} (E_{k,l}).$$

Et pour tout $l \neq l'$, $E_{k,l} \cap E_{k,l'} = \emptyset$ car il ne peut pas y avoir à la fois l boules et l' boules dans U_1.

Q2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

- Cas $j = 0$.

Dans ce cas, il n'y a pas de boules dans l'urne U_1 à l'instant k et donc la boule tirée sera nécessairement issue de l'urne U_2. Comme le protocole exige que la boule tirée change d'urne, elle atterira dans l'urne U_1. Et donc U_1 contient 1 boule à l'instant $k+1$.

- Cas $j = n$.

Dans ce cas, il n'y a pas de boules dans l'urne U_2 à l'instant k et donc la boule tirée sera nécessairement issue de l'urne U_1. Comme le protocole exige que la boule tirée change d'urne, elle atterira dans l'urne U_2. Et donc U_1 contient $n-1$ boule à l'instant $k+1$.

- Cas $j \in [\![1,\, n-1]\!]$.

Ici deux sous-cas sont possibles, l'urne U_1 va gagner une boule si la boule est tirée parmi les $n-j$ boules de U_2 et l'urne U_1 va perdre une boule si la boule tirée provient d'une des j boules de cette urne U_1. On ne demande pas ici la probabilité de chacun de ces sous-cas. En tout cas l'urne U_1 aura $j \pm 1$ boules à l'instant $k+1$.

Q3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in [\![0,\, n]\!]$, déterminons : $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})$.

- Cas $j = 0$.

Pour k entier fixé et l entier fixé entre 0 et n, on veut calculer $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,0})$, c'est-à-dire la probabilité que l'urne U_1 n'ait aucune boule à l'instant $k+1$ sachant qu'elle contenait l boules à l'instant k. Or, le seul moyen d'être dans la situation de n'avoir aucune boule dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$ est qu'à l'instant k, U_1 contenait une seule boule. Donc pour $l \neq 1$, $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = 0$. Puis, dans le cas où U_1 possède une seule boule et comme il y a n boules, la probabilité de tirer la boule de U_1 est donc $1/n$. On peut conclure.

$$\forall l \in [\![0,\, n]\!] \setminus \{1\},\ P_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = 0 \text{ et } P_{E_{k,1}}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}.$$

- Cas $j = n$.

Pour k entier fixé et l entier fixé entre 0 et n, on veut calculer $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,n})$, c'est-à-dire la probabilité que l'urne U_2 n'ait aucune boule à l'instant $k+1$ sachant qu'elle contenait $n-l$ boules à l'instant k (car U_1 en contenait l). Or, le seul moyen d'être dans la situation de n'avoir aucune boule dans l'urne U_2 à l'instant $k+1$ est qu'à l'instant k, U_1 contenait $n-1$ boules et U_2 une seule. Donc pour $l \neq n-1$, $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,n}) = 0$. Puis, dans le cas où U_2 possède une seule boule et comme il y a n boules, la probabilité de tirer la boule de U_2 est toujours $1/n$. On peut conclure.

$$\forall l \in [\![0,\, n]\!] \setminus \{n-1\},\ P_{E_{k,l}}(E_{k+1,n}) = 0 \text{ et } P_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}.$$

- Cas $j \in [\![1,\, n-1]\!]$.

À l'instant k, l'urne U_1 possède l boules. On peut en ajouter ou en enlever une à l'instant $k+1$. Donc à l'instant $k+1$, il y a $j \pm 1$ boules dans l'urne U_1.

$$\forall l \in [\![0,\, n]\!] \setminus \{j-1, j+1\},\ P_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0.$$

Si $l = j-1$, on doit passer de $j-1$ boules à j boules dans l'urne U_1 et il faut donc tirer une boule de U_2, qui contient $n-(j-1) = n-j+1$ boules à l'instant k. La probabilité de tirer une boule de U_2 est donc $(n-j+1)/n$.
Si $l = j+1$, on doit passer de $j+1$ boules à j boules dans l'urne U_1 et il faut donc tirer une boule de U_1, qui contient $j+1$ boules à l'instant k. La probabilité de tirer une boule de U_1 est donc $(j+1)/n$. On peut conclure.

$$P_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} \text{ et } P_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \frac{j+1}{n}.$$

Q4. • Démontrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P\left(E_{k+1,0}\right) = \dfrac{1}{n} P\left(E_{k,1}\right)$.
On utilise le fait que $(E_{k,l})_{0 \leqslant l \leqslant n}$ est un système complet d'évènements et (vous l'avez deviné), on use de la formule des probabilités totales.

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0})\mathbb{P}(E_{k,l}).$$

Or, d'après la question précédente, $\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = 0$ si $l \neq 1$ et $\mathbb{P}_{E_{k,1}}(E_{k+1,0}) = \dfrac{1}{n}$.

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \mathbb{P}_{E_{k,1}}(E_{k+1,0})\mathbb{P}(E_{k,1}) = \frac{1}{n} \times \mathbb{P}(E_{k,1}).$$

• Démontrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P\left(E_{k+1,n}\right) = \dfrac{1}{n} P\left(E_{k,n-1}\right)$.
On part encore de la formule des probabilités totales.

$$\mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,n})\mathbb{P}(E_{k,l}).$$

Or, d'après la question précédente, $\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,n}) = 0$ si $l \neq n-1$ et $\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n}) = \dfrac{1}{n}$.

$$\mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n})\mathbb{P}(E_{k,n-1}) = \frac{1}{n} \times \mathbb{P}(E_{k,n-1}).$$

• Démontrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in [\![1,\, n-1]\!]$,

$$P\left(E_{k+1,j}\right) = \frac{n-j+1}{n} P\left(E_{k,j-1}\right) + \frac{j+1}{n} P\left(E_{k,j+1}\right).$$

On part toujours de la formule des probabilités totales.

$$\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,l}).$$

Or, d'après la question précédente, $\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = 0$ si $l \neq j-1$ et $l \neq j+1$.

$$\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

Puis, toujours d'après la question précédente, $P_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \dfrac{n-j+1}{n}$ et $P_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \dfrac{j+1}{n}$.
On peut conclure.

$$\forall j \in [\![1,\, n-1]\!],\ \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} \times \mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} \times \mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

Q5. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = \dfrac{1}{n^k} A_n^k Z_0$, où A_n est la matrice introduite dans l'énoncé et $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$, où pour tout $l \in [\![0,\, n]\!]$, $p_{k,l} = P\left(E_{k,l}\right)$. Partons de $\dfrac{1}{n} A_n Z_k$.

$$\frac{1}{n} A_n Z_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}.$$

La ligne L_1 de la matrice colonne résultante est $\dfrac{1}{n} P(E_{k,1}) = P(E_{k+1,0})$.
La ligne L_n de la matrice colonne résultante est $\dfrac{1}{n} P(E_{k,n-1}) = P(E_{k+1,n})$.
Enfin, pour tout $j \in [\![1,\, n-1]\!]$, la ligne L_j de la matrice colonne résultante est

$$\frac{n-j+1}{n} \times \mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} \times \mathbb{P}(E_{k,j+1}),$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(E_{k+1,j})$. On en déduit l'égalité :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ Z_{k+1} = \frac{1}{n} A_n Z_k.$$

On en déduit alors, par une récurrence immédiate le résultat.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0.$$

Q6. Déterminons la loi π de N_0.
On précise l'énoncé à partir de maintenant. On suppose jusqu'à la fin du Problème qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2. Dire que les n boules sont placées de manière équiprobable signifie que chaque boule a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être placée à l'instant $k = 0$ dans l'urne U_1 (et idem dans l'urne U_2). N_0 est la variable aléatoire égale au nombre de boules dans U_1 à l'instant 0. Ainsi N_0 est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes X_i, i variant de 1 à n, associant à X_i la valeur 1 si la boule numéro i est dans U_1 et la valeur 0 si la boule numéro i est dans U_2. Le paramètre commun de ces n variables de Bernoulli est $\frac{1}{2}$. Comme $N_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, N_0 suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Ainsi, $N_0(\Omega) = [\![0,\, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0,\, n]\!]$,

$$P(N_0 = j) = \tbinom{n}{j} \frac{1}{2^j} \times \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{n-j} = \tbinom{n}{j} \frac{1}{2^n}.$$

Problème 03

Q1. Au voisinage de 0, $\cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2} + o_0(u^2)$ et $ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} + o_0(u^2)$.

Q2. Posons, pour tout entier naturel n, $w_n = ln\left(cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)$

Remarquons que l'on a immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = ln(1) = 0$, ce qui nous permet de dire que la série de terme général w_n ne diverge pas grossièrement.

Nous allons utiliser des développements limités pour obtenir un équivalent simple de w_n au voisinage de $+\infty$.

Le développement limité de $cos(x)$ et de $\ln(1-x)$au voisinage de 0 à l'ordre 2 ont été rappelés dans la question 01.

On peut donc écrire, pour n au voisinage de $+\infty$: $cos(\dfrac{\pi}{n+1}) = 1 - \dfrac{\pi^2}{2(n+1)^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$

Donc $w_n = ln\left(1 - \dfrac{\pi^2}{2(n+1)^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\right)$, et par composition des développements limités :

$w_n = -\dfrac{\pi^2}{2(n+1)^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

Donc au voisinage de $+\infty$, w_n est équivalent à $-\dfrac{\pi^2}{2(n+1)^2}$, donc aussi à $-\dfrac{\pi^2}{2n^2}$.

On utilise alors le critère d'équivalence pour les séries numériques à termes de signes constants (ici négatifs), et le fait que la série de terme général $-\dfrac{\pi^2}{2n^2}$ est convergente (car la série $_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente), pour conclure finalement que :

$$\text{la série de terme général } ln\left(cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) \text{ est convergente.}$$

Q3a. Après avoir défini la suite $(R_n)_{n\geqslant 2}$, l'énoncé manipule le logarithme népérien des termes de cette suite. On pourrait vérifier que ceci est bien valide en montrant par exemple par récurrence que $\forall k \geqslant 2, R_k > 0$. En effet, c'est vrai pour R_2 et si $R_n > 0$ alors R_{n+1} est le produit de $R_n > 0$ et de $cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) > 0$ donc est positif strictement.

Q3b. Soit n un entier tel que $n \geqslant 4$. Transformons de deux façons la somme proposée :

— $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}(ln(R_k) - ln(R_{k-1})) = \sum_{k=4}^{n} ln(R_k) - \sum_{k=4}^{n} ln(R_{k-1}) = ln(R_n) - ln(R_3)$ car il s'agit de sommes télescopiques.

— $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}(ln(R_k) - ln(R_{k-1})) = \sum_{k=4}^{n} ln\left(\frac{R_k}{R_{k-1}}\right) = \sum_{k=4}^{n} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$

Q3c. D'après la question précédente, $\forall n \geqslant 4, ln(R_n) = ln(R_3) + \displaystyle\sum_{k=4}^{n} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$.

Or d'après la question Q2, la série de terme général $ln\left(cos\left(\dfrac{\pi}{k+1}\right)\right)$ converge , donc la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

On a donc $ln(R_n)$ qui admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\text{la suite } (ln(R_n))_{n\geq 2} \text{ est convergente.}$$

Q3d. Intéressons nous au logarithme népérien du produit proposé :

$$ln\left(\prod_{k=3}^{N} cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right) = \sum_{k=3}^{N} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right) = \sum_{n=2}^{N-1} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$$

C'est la somme partielle de la série convergente étudiée à la question 1., elle admet donc une limite fine α lorsque n tend vers $+\infty$.

Par composition avec la fonction exponentielle, on a donc :

$$\prod_{k=3}^{N} cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \text{ tend vers } R = e^{\alpha} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Q4a. D'après le cours on sait que : $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Q4b. Soit $t \in]0,1]$, on applique cette formule avec $q = 1-t$ qui est bien différent de 1, donc :
$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k = \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$

Q4c. Cette intégrale est une intégrale impropre en 0.
Or $\lim_{t \to 0} \dfrac{1-(1-t)^n}{t} = \lim_{t \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$
La fonction sous l'intégrale admet une limite finie lorsque t tend vers 0, l'intégrale est donc faussement impropre en 0, et finalement l'intégrale I_n est une intégrale convergente.

Q4d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} {}_0^1 (1-t)^k dt$ par linéarité de l'intégrale. Donc
$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\dfrac{-(1-t)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k+1}$

Il suffit alors de faire un changement d'indice pour conclure : $I_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$

Q5a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} dt = \int_0^1 \frac{(t+n)-n}{n(n+t)} dt = \int_0^1 \left(\frac{(t+n)}{n(n+t)} - \frac{n}{n(n+t)} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) dt = \left[\frac{t}{n} - ln(|t+n|) \right]_0^1.$$

Finalement on obtient : $u_n = \dfrac{1}{n} - ln(n+1) + ln(n) = \dfrac{1}{n} - ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Q5b. Déterminons un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = \frac{1}{n} - ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc au voisinage de $+\infty$, u_n est équivalent à $\dfrac{1}{2n^2}$.
On utilise alors le critère d'équivalence pour les séries numériques à termes de signes positifs , et le fait que la série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ est convergente (car la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente), pour conclure finalement que :

la série de terme général u_n est convergente.

Q5c. • Intéressons-nous à la somme partielle de la série de terme général u_n. Si $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - ln(k+1) + ln(k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1) - ln(1) \text{ car les deux dernières sommes se télescopent.} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1)
\end{aligned}$$

- Or $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-ln(n)\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-ln(n+1)\right)+ln(n+1)-ln(n)=\sum_{k=1}^{n}u_k+ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ On constate que :
  — $\sum_{k=1}^{n}u_k$ tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ en tant que somme partielle de la série de terme général u_n qui converge.
  — $ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Finalement on en déduit l'existence du réel : $\gamma=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-ln(n)\right)$.

Q6a. Soit n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.
Le changement de variable $u=\frac{t}{n}$ nous permet immédiatement d'obtenir :

$$G_n(x)=n^x\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}du.$$

Q6b. Soit la propriété $\mathcal{P}_n$: "$\forall x>0, G_n(x)=\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$".

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul. Si $x>0$, alors :

$$G_1(x)=\int_0^1(1-u)u^{x-1}du=\int_0^1(u^{x-1}-u^x)du$$

$$=\left[\frac{u^x}{x}-\frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}.$$

Or si $n=1$, $\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{1}{x(x+1)}$, donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Q6c. Soit $x>0$. On a alors : $G_{n+1}(x)=(n+1)^x\int_0^1(1-u)^{n+1}u^{x-1}du$
Effectuons une intégration par parties,

$$w(u)=(1-u)^{n+1} \qquad w'(u)=-(n+1)(1-u)^n$$
$$v'(u)=u^{x-1} \qquad v(u)=\frac{u^x}{x}$$

Les fonctions w et v sont bien de classe C^1 sur $]0,1]$, on a alors :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x)&=(n+1)^x\left[(1-u)^{n+1}\frac{u^x}{x}\right]_0^1+\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1(1-u)^n u^x du\\
&=\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1(1-u)^n u^x du\\
&=\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}((u-1)+1)du\\
&=-\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1(1-u)^{n+1}u^{x-1}du+\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}du\\
&=-\frac{n+1}{x}G_{n+1}(x)+\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\frac{1}{n^x}G_n(x)
\end{aligned}$$

Q6d. On a donc :

$$\frac{x+n+1}{x}G_{n+1}(x)=\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\frac{1}{n^x}G_n(x)\Rightarrow G_{n+1}(x)=\frac{(n+1)^{x+1}}{n^x(x+n+1)}G_n(x).$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence : $G_n(x)=\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$,
donc $G_{n+1}(x)=\dfrac{(n+1)^{x+1}(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)}$, q.e.d
Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N}^*,\forall x>0, G_n(x)=\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Q7. Soit x un réel strictement positif fixé. On a alors, pour k au voisinage de $+\infty$:
$ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{x}{k}=\dfrac{x}{k}-\dfrac{x^2}{2k^2}+o\left(\dfrac{x^2}{k^2}\right)-\dfrac{x}{k}=-\dfrac{x^2}{2k^2}+o\left(\dfrac{x^2}{k^2}\right)$
Cette expression, au voisinage de $+\infty$, est équivalente à $-\dfrac{x^2}{2}\times\dfrac{1}{k^2}$ et est négative.
On utilise alors le critère d'équivalence pour les séries numériques à termes de signes constants (ici négatifs), et le fait que la série de terme général $-\dfrac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, pour conclure finalement que :

la série de terme général $ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{x}{k}$ est convergente.

Q8. Remarquons que :

$$ln\left(\prod_{k=1}^{N}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)\right)=\sum_{k=1}^{N}\left(ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$$

qui tend vers une limite finie β lorsque N tend vers $+\infty$ d'après la question précédente (somme partielle d'une série convergente).
Donc, en composant par la fonction exponentielle, on peut affirmer que :

$V_N=\displaystyle\prod_{k=1}^{N}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)$ tend vers une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$

Q9. Nous allons transformer l'expression de $G_n(x)$ obtenue à la question **Q6d**.
Soit x un réel strictement positif fixé et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
G_n(x)&=\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\\
&=\frac{n^x}{x\frac{x+1}{1}\frac{x+2}{2}\cdots\frac{x+n}{n}}\\
&=\frac{n^x}{x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\\
&=\frac{e^{xln(n)}}{x}e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}}e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\\
&=\frac{e^{-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-ln(n)\right)}}{x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{x}{k}}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)$ tend vers une limite finie non nulle (nous l'avions notée e^{β}) lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{x}{k}}$ tend vers une limite finie non nulle (qui est $e^{-\beta}$) lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus, en **Q5**, nous avons montré que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-ln(n)$ tend vers une limite notée γ.

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)=\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{x}{k}}$.