Vector isometry and real symmetrical matrix

Exercice 01

Le plan $\mathbf{R}^2$ est rapporté et orienté par sa base canonique $\{\vec{i},\vec{j}\}$. Et θ est fixé dans $[0,2\pi[$.

1. On considère s l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice $M=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $M^2=I_2$. Conclusion ? Vérifier que $M\in O_2(\mathbf{R})$.
   (b) Déterminer une base sous la forme d'un vecteur unitaire du type $\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$, où a est à déterminer, de $E_1(M)=\left\{X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ MX=X\right\}$. On remarquera pour la suite que l'angle de vecteurs $\left(\widehat{\vec{i},\ (\cos a,\ \sin a)}\right)$ est a.
   (c) Déterminer une base sous la forme d'un vecteur unitaire du type $\begin{pmatrix}\sin b\\ -\cos b\end{pmatrix}$, où b est à déterminer, de $E_{-1}(M)=\left\{X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ MX=-X\right\}$.
   (d) Montrer que $E_1(M)$ et $E_{-1}(M)$ sont directement orthogonaux. Reconnaître s.
   (e) Application : Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}12 & 5\\ 5 & -12\end{pmatrix}$.
2. On considère r l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice $M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $M\in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$.
   (b) On pose $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $r(\vec{u})=x'\vec{i}+y'\vec{j}$. Montrer $\cos\left(\widehat{\vec{u},\ r(\vec{u})}\right)=\cos\theta$ et $\sin\left(\widehat{\vec{u},\ r(\vec{u})}\right)=\sin\theta$.
   (On pourra utiliser le fait que $\|\vec{u}\|=\|r(\vec{u})\|$.)
   En déduire l'angle de vecteurs $\left(\widehat{\vec{u},\ r(\vec{u})}\right)$ en fonction de θ et reconnaître r.
   (c) Application : soit ρ l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$. Reconnaître ρ.
3. On note s_{D_i} la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle D_i ayant pour base le vecteur unitaire $\vec{u}_i$, pour tout $i\in[\![1,2]\!]$. On suppose que l'angle de droites $\left(\widehat{D_1,\ D_2}\right)$ est α. De plus, on suppose que $\left(\widehat{\vec{i},\ \vec{u}_1}\right)=\beta$.
   (a) Que vaut $\left(\widehat{\vec{i},\ \vec{u}_2}\right)$? Vérifier par un dessin que la composée $s_{D_2}\, o\, s_{D_1}$ est la rotation vectorielle dont l'angle a pour mesure le double de celle de l'angle $\left(\widehat{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2}\right)$, c'est-à-dire 2α.
   (b) Écrire la matrice de s_{D_2} puis celle de s_{D_1} et calculer celle de $s_{D_2}\, o\, s_{D_1}$. Retrouver la matrice de la rotation vectorielle d'angle 2α.
4. Soit ψ_1 la symétrie orthogonale par rapport à $\mathsf{Vect}\left[\vec{u}(\cos(\pi/6),\ \sin(\pi/6))\right]$, ψ_2 la symétrie orthogonale par rapport à $\mathsf{Vect}\left[\vec{v}(\cos(-\pi/6),\ \sin(-\pi/6))\right]$, trouver une relation entre ρ, ψ_1 et ψ_2.

Exercice 02

Classifier les éléments de $\mathrm{O}(\mathbf{R}^2)$ en utilisant les symétries orthogonales.
Starter : on pourra user de l'exercice précédent car on sait qu'une rotation se décompose en produit de deux symétries orthogonales.

T.S.V.P →

Exercice 03

Démontrer : $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in E^3$, $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$.
Indication : on se placera dans une base orthonormée directe où $\vec{u}(a,0,0)$, $\vec{v}(b,c,0)$ et $\vec{w}(d,e,f)$.

Exercice 04

Résoudre pour tout $(\vec{a},\vec{b})\in E^2$ fixé l'équation : $\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b}$.
Indication : on traitera rapidement les cas où l'un des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est nul et le cas où $\vec{a}.\vec{b}\neq 0$. Dans le dernier cas, on écrit $\vec{x}$ dans la base $\{\vec{a},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b}\}$. Enfin, on utilise la formule de l'exercice précédent.

Exercice 05

Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ et $\vec{d}$ dans E tel que trois d'entre eux ne soient pas coplanaires.
Écrire une combinaison linéaire nulle (à coefficients non tous nuls) entre ces quatre vecteurs.
Indication : on posera $\vec{u}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=0$ en supposant $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\neq 0$. On utilisera $\left[\vec{u},\vec{b},\vec{c}\right]$, $\left[\vec{u},\vec{a},\vec{b}\right]$ et $[\vec{u},\vec{c},\vec{a}]$ pour trouver des relations entre α, β, γ et δ.

$(\mathbf{R}^3,\langle\,,\,\rangle)$ euclidien est rapporté et orienté par sa base canonique $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ de l'exercice 06 à l'exercice 11.

Exercice 06

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation :

1. $x+2y-3z=0$. **2.** $y=x\tan\theta$, où $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$.

Starter : on pourra trouver un vecteur unitaire orthogonal $\vec{n}$ pour chacun des plans puis poser $\vec{u}(x,y,z)$ et remarquer que l'application $\vec{u}\mapsto\vec{u}-2\langle\vec{u},\vec{n}\rangle\,\vec{n}$ est la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathbf{R}\,\vec{n})^\perp$.

Exercice 07

Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

Calculer A^{479}.

Exercice 08

Caractériser géométriquement l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ de matrice : $A=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 2\\ 6 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

Exercice 09

Caractériser géométriquement l'endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ de matrice : $B=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & 1 & -4\\ -4 & 4 & -7\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit D la droite d'équation cartésienne $\left\{x+\sqrt{3}y-2z=0,2x-z=0\right\}$.
Déterminer l'image D_θ de la droite D par la rotation d'axe dirigée par $\vec{i}$ et d'angle θ.
Starter : on remarquera que l'on cherche une droite.

Exercice 11

Soit $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - z, y - z, -x - y + z)$.

1. Déterminer la matrice A de ϕ et vérifier qu'elle est symétrique réelle.
2. La diagonaliser dans une base de vecteurs propres orthogonaux.

Exercice 12

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$ et $(\vec{a}, \vec{b})$ une famille libre de deux vecteurs unitaires de E. Soit $f : E \to E, \vec{x} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle\, \vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle\, \vec{b}$.

1. Déterminer une base de E dans laquelle la matrice A de f est symétrique réelle.
   Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $f(\vec{a} + \vec{b})$ et $f(\vec{a} - \vec{b})$.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 13

Dans $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, $\mathcal{B}$ étant sa base canonique :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (\textit{attention au } \tfrac{1}{7} \ldots)$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que f est une isométrie vectorielle. En déduire les seules valeurs propres réelles possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$.
   En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.