2TSI. Devoir surveillé 05

Samedi 03 Avril 2021

Durée : 4 heures. Les calculettes sont interdites et les deux problèmes sont indépendants.

Problème 01

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation cartésienne

$$(t^2-1)x - 2ty = 2t(t-1).$$

1. *Question préliminaire.* Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$.
   On considère alors la droite D d'équation cartésienne
   $$ax+by+c=0$$
   ainsi que le point M_0 de coordonnées $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer que les coordonnées du projeté orthogonal H_0 de M_0 sur la droite D sont :
   $$\left(x_0 - a\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}, y_0 - b\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right).$$
   (b) En déduire la distance $d(M_0,D)$ du point M_0 à la droite D.
2. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des droites D_{-1}, D_0 et D_1.
   Indication : on trouvera deux points.
   (b) En déduire qu'il existe un unique point, dont on précisera les coordonnées, équidistant de toutes les droites $D_t, t\in R$.
3. Soit t un réel fixé. Montrer que le point $A(t)$ de composantes $(0, 1-t)$ appartient à D_t et que le vecteur $\vec{u}(t) = (-2t,\, 1-t^2)$ est un vecteur directeur de D_t puis écrire une représentation paramétrique de la droite D_t.
4. On cherche **l'enveloppe** Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$, c'est-à-dire une courbe paramétrée définie par $t\mapsto\phi(t)$ telle que, pour tout t, la droite D_t est tangente à Γ en $\phi(t)$.
   (a) En reprenant les notations de **3**, justifier le système :
   $$\left\{\begin{array}{c} \phi(t) = A(t) + \lambda(t)\,\vec{u}(t) \\ \mathsf{Det}\,(\phi'(t),\, \vec{u}(t)) = 0 \end{array}\right. ,$$
   où λ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\mathsf{Det}\left(\dfrac{dA}{dt}(t),\, \vec{u}(t)\right)$ et $\mathsf{Det}\,(\vec{u}'(t),\, \vec{u}(t))$.
   (c) En déduire $\lambda(t)$.
   (d) En déduire qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est :
   $$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\, t\mapsto\phi(t) = \left(\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{(1-t)^2}{1+t^2}\right).$$
5. On considère la courbe Γ' de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1+\cos(\theta) \\ y = 1+\sin(\theta) \end{array}\right.$, où $\theta\in[0,2\pi]$.
   (a) Reconnaître la courbe Γ'. On sera le plus précis possible.
   (b) Démontrer que $\Gamma\subset\Gamma'$. Sont-elles égales ?
   (c) Les deux courbes sont-elles parcourues dans le même sens ?

Problème 02

Dans tout le sujet, l'espace R^3 est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note E, l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans R^3.

Pour toute fonction f de E, on note ∇f son gradient.

On définit la fonction φ sur E par :

$$\forall f \in E, \varphi(f) = \nabla f.$$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ par

$$\forall f \in E, \varphi_{\vec{u}}(f) = \vec{u}.\varphi(f) \text{ (produit scalaire de } \vec{u} \text{ et } \varphi(f)).$$

PARTIE I

1. Démontrer que φ est une application linéaire à valeurs dans F.
2. Déterminer le noyau de φ. Qu'en déduit-on pour φ ?
3. (a) Énoncer le théorème de Schwarz pour les fonctions à plusieurs variables.
   (b) Soit $V : (x,y,z) \mapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appartenant à l'image de φ. Démontrer que :
   $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$
4. On pose, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $V(x,y,z) = (1+y^2+y^2z^2, xy(1+z^2), xy^2z)$.
   (a) Justifier qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\nabla f = V$.
   Qu'en déduit-on pour la fonction φ ?
   (b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x,y,z) = xV(x,y,z)$.

PARTIE II

Soient f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 les fonctions de E définies par :

$$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{aligned} &f_1(x,y,z) = \cos(x), && f_2(x,y,z) = \sin(x), \\ &f_3(x,y,z) = y\cos(x), && f_4(x,y,z) = y\sin(x), \\ &f_5(x,y,z) = z\cos(x), && f_6(x,y,z) = z\sin(x). \end{aligned}$$

On considère alors l'espace vectoriel G engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6.

Dans cette partie et la suivante, $\vec{u}$ désigne le vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. On peut remarquer qu'avec ce choix de $\vec{u}$, $\phi_{\vec{u}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$. On dit alors que $\phi_{\vec{u}}(f)$ est la divergence de f. De plus, on note ϕ_1 la restriction de la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ à G.

1. Démontrer que $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est une base notée $\mathcal{B}$ de G.
2. Démontrer que ϕ_1 est un endomorphisme de G.
3. (a) Déterminer la matrice A de ϕ_1 dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer A^2.
   (b) Sans calcul, donner les valeurs propres de A^2 et dire si A^2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   Qu'en est-il de A ?
   (c) De quelle(s) équation(s) aux dérivées partielles les vecteurs propres de $\phi_1^2 = \phi_1 \circ \phi_1$ sont-ils solutions ?
   (d) Déterminer l'ensemble des fonctions f solutions de l'équation $\phi_1^2(f) + f = 0$.
   Indication : on cherchera des vecteurs colonnes X qui vérifient $A^2X = -X$.

PARTIE III

Soit f une fonction non nulle de E. On note S la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$. On suppose que les fonctions f choisies dans la suite sont telles que la surface S est non vide et qu'au moins un point de S est régulier.

Nous allons nous intéresser à quelques fonctions f de E telles que en tout point régulier M de S, le vecteur normal au plan tangent à S en M est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

1. (a) Donner la définition d'un point régulier M_0 de S puis donner une équation du plan tangent à S en ce point M_0. On notera (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0.
   (b) Lorsque f est définie par
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$$
   et M_0 est le point de coordonnées $(1, -1, 1)$, donner une équation du plan tangent à S au point M_0. Cette fonction f répond-t-elle au problème ?
2. (a) Soit F_1 la fonction définie par
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, F_1(x,y,z) = (y-z)^2 - \alpha,$$
   où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$?. La fonction $f = F_1$ répond-elle au problème ? Décrire la surface associée.
   (b) Soit g une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction f, définie par
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = g(x-y, x-z)$$
   répond au problème.
   (c) La fonction F_1 est-elle de la forme précédente ?
3. Soit $\Gamma_1 = S \cap \Pi$ où S est la surface $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$ et Π est le plan d'équation $x + y + z = 0$. On considère les vecteurs
$$\vec{e_3} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\ \vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k} - \vec{i}),\ \text{et } \vec{e_2} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_1}.$$
   On note P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
   (a) Écrire P et vérifier que P est une matrice de rotation dont on donnera l'axe et le cosinus de son angle. Que vaut P^{-1} ?
   (b) Démontrer qu'un système d'équations de la courbe Γ_1 dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est
$$\left\{ \begin{array}{c} 5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2 \\ Z = 0 \end{array} \right. ,$$
   où (X, Y, Z) désignent les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
   Indication : on rappelle que si (x, y, z) sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.
   (c) On pose $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, vérifier que l'équation $5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2$ s'écrit : $U^T A U = 2$, où $A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$.
   (d) On pose $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Reconnaître l'isométrie plane associée à Q et en déduire sans calculs Q^{-1}.
   (e) Calculer $D = Q^{-1} A Q$.
   (f) On pose $\vec{I} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$ et $\vec{J} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2$ et $U' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = Q^{-1}U$.
   Calculer $(U')^T DU'$ et en déduire que dans $(0, \vec{I}, \vec{J})$, Γ_1 a pour équations paramétriques
$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & \alpha \cos t \\ Y' & = & \beta \sin t \end{array} \right. ,$$
   où $t \in [0, 2\pi[$ et α, β sont à déterminer.
   (g) Étudier l'arc paramétré $t \mapsto (\alpha \cos t, \beta \sin t)$,
   avec les valeurs α et β trouvées, puis dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, dessiner les axes OX' et OY' puis dessiner Γ_1.