E.P.I.T.A. 2020

Epreuve de mathématiques PT-TSI (3h)

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

■ PARTIE I : ETUDE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

On considère une variable aléatoire X, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n, dont la loi est définie par :

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \geq 1,\ \mathbb{P}(X=2\,n)=\mathbb{P}(X=2\,n+1)=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

1°) *Résultats préliminaires*

a) Préciser le rayon de convergence et expliciter la somme des trois séries entières suivantes lorsqu'elles convergent (où l'on notera que la sommation démarre à $n=1$) :

$$S_0(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\,,\quad S_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1}\,,\quad S_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n-2}.$$

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, puis vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)=1$.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$, puis vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}}=24$.

2°) *Calcul direct de l'espérance et de la variance de X*

a) A l'aide des résultats précédents, préciser les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,n}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,n+1}{2^{n+1}}$.

b) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

c) A l'aide des résultats précédents, préciser les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n)^2}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)^2}{2^{n+1}}$.

d) En déduire l'espérance $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ de X^2, puis la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

3°) *Calcul de l'espérance de X à l'aide d'une fonction auxiliaire*

On considère, sous réserve de convergence, la fonction définie par $G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{2^n}$.

b) En déduire que G est définie pour $|x|<\sqrt{2}$, et qu'on a alors l'égalité :

$$G(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,x^n \;=\; \frac{x^2+x^3}{2\left(2-x^2\right)}.$$

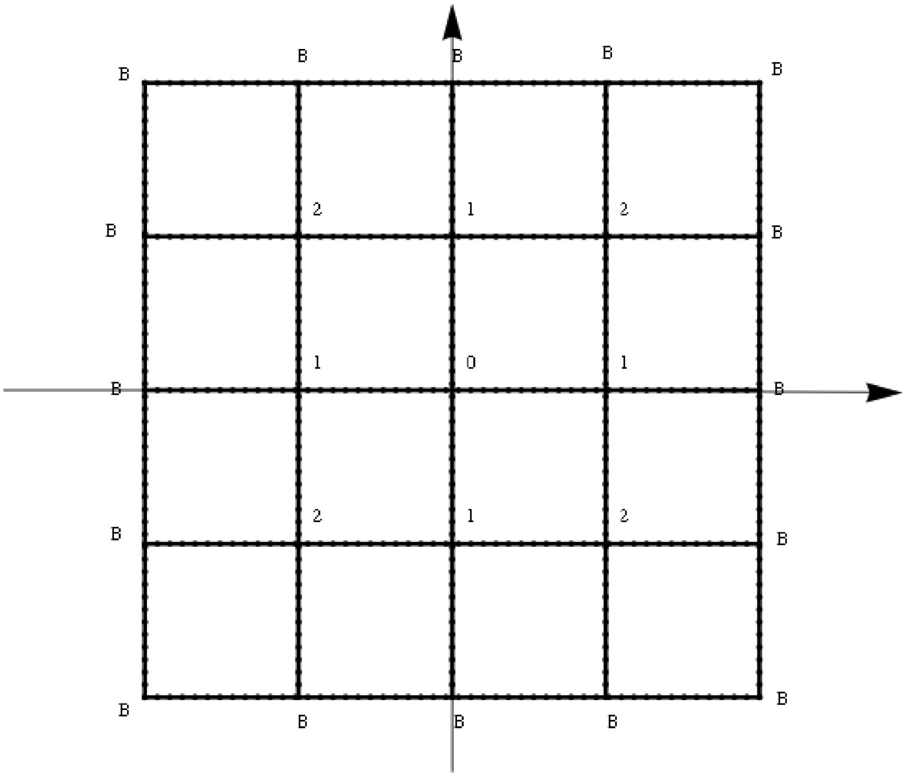
c) Comparer $G'(1)$ et $\mathbb{E}(X)$, calculer $G'(x)$ et retrouver le résultat de la question 2.b).

d) Comparer $G''(1)$ et $\mathbb{E}(X(X-1))$, et sachant que $G''(1)=24$, retrouver $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{V}(X)$.

■ PARTIE II : ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

On considère la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2, 2]\times[-2, 2]$ avec :
- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées (i, j) avec $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C, et B les points du bord du carré $C = [-2, 2]\times[-2, 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points (i, j) où $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.

Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).

2) à tout instant n, si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M, de façon à se trouver à l'instant $n+1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M.

3) à tout instant n, si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2, 2]\times[-2, 2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point (i, j) avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

4°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n. Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

a) Justifier brièvement les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) = 0,\ \ \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4},\ \ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2},\ \ \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) = 1.$$

En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = B)$.

b) Déterminer $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2)$.

En déduire $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

c) En procédant de même :

- exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
- exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

d) Déduire de ces résultats une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}\,(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}\,(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}\,(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}\,(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}\,(X_n = 0) \\ \mathbb{P}\,(X_n = 1) \\ \mathbb{P}\,(X_n = 2) \\ \mathbb{P}\,(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

5°) *Diagonalisation de la matrice M*

Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0.

a) Déterminer toutes les composantes des quatre vecteurs propres suivants de M :

- le vecteur propre U_1 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $(x,\ y,\ z,\ 1)$ associé à $\lambda = 1$.
  (La dernière composante de U_1 est égale à 1).
- le vecteur propre U_2 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $\left(x,\ y,\ -6 + 4\sqrt{2}\,,\ 1\right)$ associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$.
  (Les 2 dernières composantes de U_2 sont respectivement $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1).
- le vecteur propre U_3 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $\left(x,\ y,\ -6 - 4\sqrt{2}\,,\ 1\right)$ associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
  (Les 2 dernières composantes de U_3 sont respectivement $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1).
- le vecteur propre U_4 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $(x,\ y,\ z,\ 1)$ associé à $\lambda = 0$.
  (La dernière composante de U_4 est égale à 1).

b) On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1, U_2, U_3, U_4.

On note D la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D, M, P, P^{-1}.

6°) *Lois des variables aléatoires X_n*

Pour tout entier naturel n, on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

a) Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n, qu'on a : $V_n = P\,D^n\,P^{-1}\,V_0$.

b) Soit X un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont on note les composantes x_1, x_2, x_3, x_4.

Déterminer X tel que $P\,X = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$).

c) En déduire $P^{-1}\,V_0$, puis $D^n\,P^{-1}\,V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geq 1$.

d) Vérifier pour $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_n = B)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

7°) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*
On désigne par T la fonction indiquant l'instant $n \in \mathbb{N}$ où, *pour la première fois*, l'individu atteint le bord du carré C, c'est-à-dire où l'événement $X_n = B$ est réalisé *pour la première fois.*

a) Montrer, pour tout entier naturel n, que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$.

b) Pour tout entier naturel n, en déduire $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T = k)$, puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
Ainsi, on peut considérer la fonction T comme une variable aléatoire discrète.

c) Pour $n \geq 1$, exprimer l'événement $(T = 2\,n)$ à l'aide des événements $(X_{2\,n} = B)$ et $(X_{2\,n-1} = 1)$.
En déduire $\mathbb{P}(T = 2\,n)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

d) A l'aide d'un raisonnement analogue, déterminer $\mathbb{P}(T = 2\,n + 1)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

e) Déduire des résultats de la partie I l'espérance et la variance de la variable aléatoire T.