EPITA – IPSA – ESME
Session 2020
Corrigé de l'épreuve de mathématiques PT/TSI

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. (a) La série $\sum_n x^n$ est la série entière géométrique, qui est une série entière de référence et dont le rayon de convergence vaut 1. Les deux autres séries sont les séries dérivées (respectivement une fois et deux fois) de la série géométrique, leur rayon de convergence reste égal à 1. On a, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1} = x \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

Par théorème de dérivation terme à terme, on a alors

$$S_1(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad S_2(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(b) Puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, on a, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} S_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

D'après l'énoncé, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X=2k) + \mathbb{P}(X=2k+1)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.$$

(c) D'une part,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

D'autre part,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = S_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16.$$

Puisque toutes ces séries convergent, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-2}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 16 + 8 = 24.$$

2. (a) D'après la question 1a, toutes les séries manipulées sont convergentes. D'après la question 1c,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2,$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

(b) D'après les questions précédentes, la série $\sum_n n\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument, donc X admet une espérance. Par définition, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} [(2k)\,\mathbb{P}(X=2k) + (2k+1)\,\mathbb{P}(X=2k+1)] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2k}{2^{k+1}} + \frac{2k+1}{2^{k+1}}\right) \\ &= 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

(c) D'après la question 1a, toutes les séries manipulées sont encore convergentes. D'après la question 1c,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} = 12,$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2+4n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 12 + 4 + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}.$$

(d) D'après les questions précédentes, la série $\sum_n n^2\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument, donc d'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance, et X admet donc une variance. Toujours d'après le théorème de transfert, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} [(2k)^2\,\mathbb{P}(X=2k) + (2k+1)^2\,\mathbb{P}(X=2k+1)] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(2k)^2}{2^{k+1}} + \frac{(2k+1)^2}{2^{k+1}}\right) = 12 + \frac{33}{2} = \frac{57}{2}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, et les formules précédentes, on a alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{57}{2} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{114}{4} - \frac{81}{4} = \frac{33}{4}.$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left|\frac{x^{2n}}{2^n}\right| = \frac{|x|^{2n}}{2^n}.$$

Alors $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{|x|^{2(n+1)}}{2^{n+1}}}{\frac{|x|^{2n}}{2^n}} = \frac{|x|^2}{2}.$$

D'après le critère de D'Alembert :

- si $|x| < \sqrt{2}$, alors $\frac{|x|^2}{2} < 1$ et la série $\sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$ converge absolument.
- si $|x| > \sqrt{2}$, alors $\frac{|x|^2}{2} > 1$ et la série $\sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$ diverge grossièrement.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$ est égal à $\sqrt{2}$. Pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, en reconnaissant une série géométrique,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{2-x^2}.$$

(b) Soit $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Alors la série numérique $\sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$ converge, et

$$\sum_n \frac{x^{2n+1}}{2^n} = x \sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$$

est donc aussi une série convergente. On en déduit que $G(x)$ existe, donc que G est définie sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Alors, pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x^{2k}}{2^{k+1}} + \frac{x^{2k+1}}{2^{k+1}} \right) = \frac{1+x}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{k+1}} = \frac{1+x}{2} \times \frac{x^2}{2-x^2} = \frac{x^2+x^3}{2(2-x^2)}.$$

(c) D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $G \in \mathcal{C}^\infty \left( ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\right)$ et, pour tout $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \mathbb{P}(X=n).$$

En particulier,

$$G'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n 1^{n-1} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X).$$

D'autre part, en dérivant l'égalité obtenue à la question précédente,

$$G'(x) = \frac{(2x+3x^2)(2-x^2) + 2x(x^2+x^3)}{2(2-x^2)^2} = \frac{4x+6x^2-x^4}{2(2-x^2)^2}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = \frac{4+6-1}{2(2-1)^2} = \frac{9}{2}.$$

(d) Toujours d'après le théorème de dérivation terme à terme, pour tout $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$G''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} \mathbb{P}(X=n).$$

En particulier, d'après le théorème de transfert,

$$G''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

D'après l'énoncé, $G''(1) = 24$ donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}\left(X^2 - X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X) = 24, \quad \mathbb{E}\left(X^2\right) = 24 + \mathbb{E}(X) = \frac{57}{2}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = \frac{4+6-1}{2(2-1)^2} = \frac{9}{2}.$$

On retrouve alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{33}{4}.$$

Partie II : Étude d'une marche aléatoire

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - Si à l'instant n, l'individu se situe en 0, il ne peut aller qu'en 1, et donc pas en B, donc
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=B|X_n=0\right)=0.$$
   - Si à l'instant n, l'individu se situe en 1, il a alors une probabilité de $\frac{1}{4}$ d'aller en 0, de $\frac{1}{2}$ d'aller en 2, et de $\frac{1}{4}$ d'aller en B, donc
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=B|X_n=1\right)=\frac{1}{4}.$$
   - Si à l'instant n, l'individu se situe en 2, il a alors une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'aller en 1 et de $\frac{1}{2}$ d'aller en B, donc
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=B|X_n=2\right)=\frac{1}{2}.$$
   - D'après les règles, si à l'instant n, l'individu se situe en B, alors il y reste définitivement, donc
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=B|X_n=B\right)=1.$$

   D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{X_n=0\}$, $\{X_n=1\}$, $\{X_n=2\}$ et $\{X_n=B\}$, on a
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n+1}=B\right)&=\sum_{i=0}^{2}\mathbb{P}\left(X_{n+1}=B|X_n=i\right)\mathbb{P}\left(X_n=i\right)+\mathbb{P}\left(X_{n+1}=B|X_n=B\right)\mathbb{P}\left(X_n=B\right)\\&=\frac{1}{4}\mathbb{P}\left(X_n=1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_n=2\right)+\mathbb{P}\left(X_n=B\right).\end{aligned}$$

   (b) De la même façon, on obtient
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=2|X_n=0\right)=0, \qquad \mathbb{P}\left(X_{n+1}=2|X_n=1\right)=\frac{1}{2},$$
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=2|X_n=2\right)=0, \qquad \mathbb{P}\left(X_{n+1}=B|X_n=2\right)=0.$$
   D'après la formule des probabilités totales appliquée au même système complet d'évènements, on trouve alors
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=2\right)=\sum_{i=0}^{2}\mathbb{P}\left(X_{n+1}=2|X_n=i\right)\mathbb{P}\left(X_n=i\right)+\mathbb{P}\left(X_{n+1}=2|X_n=B\right)\mathbb{P}\left(X_n=B\right)=\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_n=1\right).$$

   (c) De même, on trouve
   $$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1\right)=\mathbb{P}\left(X_n=0\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_n=2\right), \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{4}\mathbb{P}\left(X_n=1\right)$$

   (d) D'après les question précédentes, et avec les notations de la question 6, on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1}=MV_n,$$
   avec
   $$M=\begin{bmatrix}0&1/4&0&0\\1&0&1/2&0\\0&1/2&0&0\\0&1/4&1/2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\4&0&2&0\\0&2&0&0\\0&1&2&4\end{bmatrix}.$$

5. (a) Soit $U=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors
   $$MU=U \iff \begin{cases}y=4x\\4x+2z=4y\\2y=4z\\y+2z+4=4\end{cases} \iff \begin{cases}y=4x\\4x+2z=4y\\y=2z\\y=-2z\end{cases} \iff x=y=z=0.$$

On a donc $U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -6+4\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$MU = \frac{1}{\sqrt{2}}U \iff \begin{cases} \sqrt{2}y = 4x \\ 4\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\left(-6+4\sqrt{2}\right) = 4y \\ 2\sqrt{2}y = 4\left(-6+4\sqrt{2}\right) \\ \sqrt{2}y + 2\sqrt{2}\left(-6+4\sqrt{2}\right) + 4\sqrt{2} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2\sqrt{2}x \\ 8x = -24+16\sqrt{2} \\ x = -3+2\sqrt{2} \\ 4x = -12+8\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3+2\sqrt{2} \\ y = 8-6\sqrt{2} \end{cases}.$$

On a donc $U_2 = \begin{bmatrix} -3+2\sqrt{2} \\ 8-6\sqrt{2} \\ -6+4\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -6-4\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$MU = -\frac{1}{\sqrt{2}}U \iff \begin{cases} \sqrt{2}y = -4x \\ 4\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\left(-6-4\sqrt{2}\right) = -4y \\ 2\sqrt{2}y = -4\left(-6-4\sqrt{2}\right) \\ \sqrt{2}y + 2\sqrt{2}\left(-6-4\sqrt{2}\right) + 4\sqrt{2} = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3-2\sqrt{2} \\ y = 8+6\sqrt{2} \end{cases}.$$

On a donc $U_3 = \begin{bmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 8+6\sqrt{2} \\ -6+4\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$MU = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ 4x+2z = 0 \\ 2y = 0 \\ y+2z+4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}.$$

On a donc $U_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) La matrice M est diagonalisable, car elle possède 4 valeurs propres distinctes : son polynôme caractéristique χ_M est donc scindé à racines simples. On en déduit que $M = PDP^{-1}$.

6. (a) Puisqu'à l'instant 0, l'individu est en 0, on a $V_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 4d, $V_{n+1} = MV_n$. Par récurrence directe, on a donc $V_n = M^n V_0$. Puisque $P^{-1}P = I_4$, on a alors

$$V_n = M^n V_0 = \left(PDP^{-1}\right)^n V_0 = \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1}}_{n \text{ fois}} V_0 = PD^nP^{-1}V_0.$$

(b) Pour simplifier les calculs, posons $\alpha = x_2 + x_3$ et $\beta = \sqrt{2}\,(x_2 - x_3)$. On a alors

$$x_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{2}}{4}, \quad x_3 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta\sqrt{2}}{4}.$$

On a alors

$$PX = V_0 \iff \begin{cases} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 + \left(-3-2\sqrt{2}\right)x_3 + x_4 = 1 \\ \left(8-6\sqrt{2}\right)x_2 + \left(8+6\sqrt{2}\right)x_3 = 0 \\ \left(-6+4\sqrt{2}\right)x_2 + \left(-6-4\sqrt{2}\right)x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3\alpha+2\beta+x_4 = 1 \\ 8\alpha-6\beta = 0 \\ -6\alpha+4\beta-2x_4 = 0 \\ x_1+\alpha+x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\iff} \begin{cases} -3\alpha+2\beta = \dfrac{1}{2} \\ 8\alpha-6\beta = 0 \\ x_4 = \dfrac{1}{2} \\ x_1 = -\alpha - \dfrac{1}{2} \end{cases} \overset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} -3\alpha+2\beta = \dfrac{1}{2} \\ \alpha = -\dfrac{3}{2} \\ x_4 = \dfrac{1}{2} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ \alpha = -\dfrac{3}{2} \\ \beta = -2 \\ x_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ x_3 = -\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ x_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(c) On a $PX = V_0$ donc $P^{-1}V_0 = X$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D^nP^{-1}V_0 = D^nX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4} \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ -\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On a enfin

$$V_n = PD^nP^{-1}V_0 = P \times \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n \end{bmatrix}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{2n} = 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = 0, \\
\mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = 0, \\
\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}, \\
\mathbb{P}(X_{2n} = 2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

D'après la dernière composante du vecteur V_n, on obtient également

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Puisque $\sqrt{2} > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n = B) = 1$.

7. (a) L'individu se situe au bord à l'instant n si, et seulement si, il vient de l'atteindre ou il l'a déjà atteint auparavant (car il reste au bord après l'avoir atteint). Donc les évènements $\{T \leq n\}$ et $\{X_n = B\}$ sont égaux, et donc $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 6d, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} \{T = k\}\right) = \mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

   On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k) = 1$. Par définition, la série $\sum_n \mathbb{P}(T = n)$ est donc convergente et on a montré que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'individu arrive pour la première fois en B à l'instant $2n$, alors il était en 1 ou 2 à l'instant $2n-1$. Or $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ donc il était en 1 à l'instant $2n-1$. Réciproquement, si l'individu est en 1 à l'instant $2n-1$ et en B à l'instant $2n$ alors il arrive en B pour la première fois à l'instant $2n$. On en déduit que $\{T = 2n\} = \{X_{2n} = B\} \cap \{X_{2n-1} = 1\}$. D'où, d'après la question 6d,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = 2n) &= \mathbb{P}(\{X_{2n} = B\} \cap \{X_{2n-1} = 1\}) = \mathbb{P}(X_{2n} = B | X_{2n-1} = 1)\,\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

   (d) De la même manière, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est impossible que l'individu soit en 1 en un temps pair, donc $\{T = 2n+1\} = \{X_{2n+1} = B\} \cap \{X_{2n} = 2\}$. D'où, d'après la question 6d,

$$\mathbb{P}(T = 2n+1) = \mathbb{P}(X_{2n+1} = B | X_{2n} = 2)\,\mathbb{P}(X_{2n} = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

   (e) La variable aléatoire T suit alors la même loi que la variable aléatoire X définie à la partie 1. D'après les questions 2b et 2d, on a alors

$$\mathbb{E}(T) = \frac{9}{2}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{33}{4}.$$