2TSI. Devoir surveillé 05
CORRECTION

Problème 01

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation cartésienne

$$(t^2-1)x - 2ty = 2t(t-1).$$

1-a *Question préliminaire.* Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On considère alors la droite D d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ainsi que le point M_0 de coordonnées $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Démontrons que les coordonnées du projeté orthogonal H_0 de M_0 sur la droite D sont :

$$\left(x_0 - a\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}, y_0 - b\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right).$$

Les coordonnées de H_0 peuvent par définition du projeté orthogonal s'écrire sous la forme :

$$x_h = x_0 + \lambda a,\ y_h = y_0 + \lambda b,$$

où λ est un réel. DE plus, $(x_h,\ y_h) \in D$:

$$a(x_0+\lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0.$$

On tire alors de cette équation la valeur de λ, on obtient : $\lambda = -\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$.
D'où les coordonnées annoncées de H_0 :

$$\left(x_0 - a\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}, y_0 - b\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right).$$

1-b Déduisons en la distance $d(M_0, D)$ du point M_0 à la droite D.
On sait que $d(M_0, D) = \|\overrightarrow{M_0H_0}\|$. Alors :

$$d(M_0, D) = \left\|\left(a\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2},\ b\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right)\right\| = \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\ \|(a,b)\|.$$

On continue.

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2-a Déterminons l'ensemble des points du plan équidistants des droites D_{-1}, D_0 et D_1.
On a déjà : $\begin{cases} D_0 : x = 0 \\ D_{-1} : y = 2 \\ D_1 : y = 0 \end{cases}$. Un point M de coordonnées (x, y) est donc équidistants des trois droites si et seulement si :

$$|x| = |y-2| = |y|.$$

En particulier, $(y-2)^2 = y^2$, d'où l'on tire $y = 1$ et donc $x = \pm 1$. Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ sont les solutions.

2-b Déduisons en qu'il existe un unique point, dont on précisera les coordonnées, équidistant de toutes les droites $D_t, t \in R$.
Ce point est aussi équidistants des droites D_0, D_{-1} et D_1. Les seuls candidats sont $(1, 1)$ et $(-1, 1)$.

$$d((1,1),\, D_t) = \frac{\left|t^2-1-2t-2t(t-1)\right|}{\sqrt{(t^2-1)^2+4t^2}} = \frac{\left|1+t^2\right|}{\sqrt{(1+t^2)^2}} = 1.$$

De même,

$$d((-1,1),\, D_t) = \frac{\left|1-3t^2\right|}{\sqrt{(1+t^2)^2}}.$$

Cette dernière distance n'est pas constante. La réponse est donc $(1,1)$.

3. Soit t un réel fixé. Montrons que le point $A(t)$ de composantes $(0, 1-t)$ appartient à D_t et que le vecteur $\vec{u}(t) = (-2t,\, 1-t^2)$ est un vecteur directeur de D_t puis écrivons une représentation paramétrique de la droite D_t.

Il est clair que $(t^2-1)\times 0 - 2t(1-t) = 2t(t-1)$ et $A(t) \in D_t$ puis on rappelle que la droite $ax+by=c$ a pour vecteur directeur $(-b, a)$ et donc $\vec{u}(t) = (b, -a)$ aussi.

On en déduit le paramétrage suivant, où $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lcc} x & = & -2t\lambda \\ y & = & 1-t+\lambda(1-t^2) \end{array}\right. .$$

4-a On cherche **l'enveloppe** Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$, c'est-à-dire une courbe paramétrée définie par $t \mapsto \phi(t)$ telle que, pour tout t, la droite D_t est tangente à Γ en $\phi(t)$. En reprenant les notations de **3**, justifions le système :

$$\left\{\begin{array}{c} \phi(t) = A(t) + \lambda(t)\,\vec{u}(t) \\ \mathrm{Det}\,(\phi'(t),\, \vec{u}(t)) = 0 \end{array}\right. ,$$

où λ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque que la tangente en un point $M(t) = \phi(t)$ de Γ est portée par $\vec{u}(t)$ et donc $\phi'(t)$ est colinéaire à $\vec{u}(t)$, ce qui se traduit par : $\mathrm{Det}\,(\phi'(t),\, \vec{u}(t)) = 0$. Par ailleurs, la tangente étant D_t, elle passe par $A(t)$ et est de vecteur directeur $\vec{u}(t)$. Elle passe aussi par $\phi(t)$ car c'est le point de contact de Γ et de la tangente. Donc il existe $\lambda(t) \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{A(t)\phi(t)} = \lambda(t)\vec{u}(t)$.

4-b Calculons $\mathrm{Det}\left(\frac{dA}{dt}(t),\, \vec{u}(t)\right)$ et $\mathrm{Det}\,(\vec{u}'(t),\, \vec{u}(t))$.

$$\mathrm{Det}\left(\frac{dA}{dt}(t),\, \vec{u}(t)\right) = \left|\begin{array}{cc} 0 & -2t \\ -1 & 1-t^2 \end{array}\right| = -2t.$$

$$\mathrm{Det}\left(\vec{u}'(t),\, \vec{u}(t)\right) = \left|\begin{array}{cc} -2 & -2t \\ -2t & 1-t^2 \end{array}\right| = -2(1+t^2).$$

4-c Déduisons du bins précédent : $\lambda(t)$.

$$\phi(t) = A(t) + \lambda(t)\,\vec{u}(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{dA}{dt}(t) + \lambda'(t)\,\vec{u}(t) + \lambda(t)\,\vec{u}'(t).$$

Et donc :

$$\mathrm{Det}\,(\phi'(t),\, \vec{u}(t)) = \mathrm{Det}\left(\frac{dA}{dt}(t) + \lambda'(t)\,\vec{u}(t) + \lambda(t)\,\vec{u}'(t),\, \vec{u}(t)\right).$$

On utilise la linéarité du déterminant par rapport à la première variable.

$$\mathrm{Det}\,(\phi'(t),\, \vec{u}(t)) = \mathrm{Det}\left(\frac{dA}{dt}(t),\, \vec{u}(t)\right) + \mathrm{Det}\,(\lambda'(t)\,\vec{u}(t),\, \vec{u}(t)) + \mathrm{Det}\,(\lambda(t)\,\vec{u}'(t),\, \vec{u}(t)).$$

Il reste (car $\mathrm{Det}\,(\lambda'(t)\,\vec{u}(t),\, \vec{u}(t)) = 0$).

$$\mathrm{Det}\,(\phi'(t),\, \vec{u}(t)) = \mathrm{Det}\left(\frac{dA}{dt}(t),\, \vec{u}(t)\right) + \mathrm{Det}\,(\lambda(t)\,\vec{u}'(t),\, \vec{u}(t)).$$

Et finalement :

$$\text{Det}\,(\phi'(t),\,\vec{u}(t)) = \text{Det}\,\left(\frac{dA}{dt}(t),\,\vec{u}(t)\right) + \lambda(t)\,\text{Det}\,(\vec{u}'(t),\,\vec{u}(t)).$$

Il reste à utiliser la question précédente.

$$\text{Det}\,(\phi'(t),\,\vec{u}(t)) = -2t - 2(1+t^2)\lambda(t)$$

Or, $\text{Det}\,(\phi'(t),\,\vec{u}(t)) = 0$. Ainsi :

$$\lambda(t) = -\frac{t}{1+t^2}.$$

On remarque que λ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

4-d Déduisons qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto \phi(t) = \left(\dfrac{2t^2}{1+t^2},\,\dfrac{(1-t)^2}{1+t^2}\right)$.

En effet, on remplace $\lambda(t)$ trouvé dans $\phi(t) = A(t) + \lambda(t)\,\vec{u}(t)$.

$$\phi(t) = (0,\,1-t) - \frac{t}{1+t^2}\left(-2t,\,1-t^2\right) = \left(\frac{2t^2}{1+t^2},\,1-t+\frac{t(t^2-1)}{1+t^2}\right).$$

On obtient bien :

$$\phi(t) = \left(\frac{2t^2}{1+t^2},\,\frac{(1-t)^2}{1+t^2}\right).$$

5-a On considère la courbe Γ' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+\cos(\theta) \\ y = 1+\sin(\theta) \end{cases}$, où $\theta\in[0,2\pi]$. Reconnaissons la courbe Γ'.

C'est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 1.

5-b Démontrons que $\Gamma\subset\Gamma'$. Sont-elles égales ?

Montrons que si $\phi(t) = (x(t),\,y(t))$, $(x(t)-1)^2 + (y(t)-1)^2 = 1$.

$$\left(\frac{2t^2}{1+t^2}-1\right)^2 + \left(\frac{(1-t)^2}{1+t^2}-1\right)^2 = \left(\frac{2t^2-1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{(1-t)^2-(1+t^2)}{1+t^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left((t^2-1)^2+4t^2\right) = \frac{1}{(1+t^2)^2}\left((t^2+1)^2\right) = 1.$$

On a bien : $\Gamma\subset\Gamma'$. Comme le point $(2,1)\in\Gamma'\setminus\Gamma$ (en effet, $\dfrac{2t^2}{1+t^2} = 2$ est impossible), $\Gamma\neq\Gamma'$.

5-c Les deux courbes sont-elles parcourues dans le même sens ?

Étant donné le sens de rotation des droites D_t que l'on devine grâce aux droites D_{-1}, D_0 et D_1, on obtient que les deux courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique.

Problème 02

Dans tout le sujet, l'espace R^3 est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note E, l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans R^3.

Pour toute fonction f de E, on note ∇f son gradient.

On définit la fonction φ sur E par : $\forall f\in E, \varphi(f) = \nabla f$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ par

$$\forall f\in E, \varphi_{\vec{u}}(f) = \vec{u}.\varphi(f) \text{ (produit scalaire de } \vec{u} \text{ et } \varphi(f)).$$

PARTIE I

1. Démontrons que φ est une application linéaire à valeurs dans F.

Soit $f \in E$. Notons $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ses dérivées partielles respectives par rapport aux première, deuxième et troisième place.

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ y sont continues.

φ est l'application $f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Elle est donc bien à valeurs dans F.

Par linéarité de la dérivation sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, les applications $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$, $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$, $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}$ sont linéaires.

Ainsi, $\forall f, g \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \left(\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z}\right)$.

$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mu \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$.

Donc φ est bien une application linéaire à valeurs dans F.

2. Déterminons le noyau de φ. Qu'en déduit-on pour φ ?

Soit $f \in E$, $\varphi(f) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sont des fonctions nulles sur $\mathbb{R}$, donc f ne dépend ni de x, ni de y, ni de z. f est donc constante sur $\mathbb{R}^3$.

Réciproquement, si f est constante sur $\mathbb{R}^3$, sont gradient est nul.

On en déduit que le noyau de φ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas réduit à la fonction nulle, donc φ est non injectif.

3-a Énoncons le théorème de Schwarz pour les fonctions à plusieurs variables.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^3$. On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée par rapport à la i^e place.

Alors $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \forall a \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

3-b Soit $V : (x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appartenant à l'image de φ.

Démontrons que : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

Soit $V : (x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appartenant à l'image de φ.

$\exists f \in E$, telle que $V = \varphi(f)$. On a alors $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ et $R = \frac{\partial f}{\partial z}$.

V étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, P,Q et R le sont aussi. Les dérivées partielles de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

On déduit du théorème de Schwarz :

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

4-a On pose, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = (1 + y^2 + y^2z^2, xy(1 + z^2), xy^2z)$.

- Justifions qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\nabla f = V$.

V est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, ses composantes étant des fonctions polynômes en x, y, z.

Si par l'absurde, il existait une fonction f telle que $\nabla f = V$, on aurait $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Or $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = 2y(1 + z^2)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = y(1 + z^2)$, donc $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, ce qui est contradictoire.

Donc il n'existe pas de fonction f telle que $\nabla f = V$.

• Qu'en déduit-on pour la fonction φ ?

On en déduit que la fonction φ n'est pas surjective.

4-b Déterminons toutes les fonctions f telles que $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x,y,z) = xV(x,y,z)$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}(1+y^2+y^2z^2)$ est une primitive de $x \mapsto x(1+y^2+y^2z^2)$.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $h(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2}(1+y^2+y^2z^2)$. Les fonctions coordonnées de h sont des polynômes en x, y et z donc sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = x(1+y^2+y^2z^2)$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = x^2y(1+z^2)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = x^2y^2z$.

On a donc bien $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla h(x,y,z) = xV(x,y,z)$.

Soit $f \in E.f$ vérifie « $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla f(x,y,z) = xV(x,y,z)$ »si et seulement si $\varphi(f) = \varphi(h)$, c'est-à-dire, par linéarité de φ, $f - h \in \ker\varphi$.

D'après la question 2., l'ensemble des fonctions f telles que $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x,y,z) = xV(x,y,z)$ est $\left\{ \begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2}{2}(1+y^2+y^2z^2)+k \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}$.

PARTIE II

Soient f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 les fonctions de E définies par :

$$\begin{array}{lll} \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, & f_1(x,y,z) = \cos(x), & f_2(x,y,z) = \sin(x), \\ & f_3(x,y,z) = y\cos(x), & f_4(x,y,z) = y\sin(x), \\ & f_5(x,y,z) = z\cos(x), & f_6(x,y,z) = z\sin(x). \end{array}$$

On considère alors l'espace vectoriel G engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6.

Dans cette partie et la suivante, $\vec{u}$ désigne le vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. On peut remarquer qu'avec ce choix de $\vec{u}$, $\phi_{\vec{u}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$. On dit alors que $\phi_{\vec{u}}(f)$ est la divergence de f. De plus, on note ϕ_1 la restriction de la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ à G.

1. Démontrons que $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est une base notée $\mathcal{B}$ de G.

$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est une famille génératrice de G. Donc pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_6) \in \mathbf{R}^6$ tel que $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i = 0$. Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, on peut écrire :

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 y\cos(x) + \lambda_4 y\sin(x) + \lambda_5 z\cos(x) + \lambda_6 z\sin(x).$$

Pour $(x,y,z) = (0,0,0)$, on obtient : $\lambda_1 = 0$.

Pour $(x,y,z) = (\pi/2,0,0)$, on obtient : $\lambda_2 = 0$.

Ainsi : $\forall(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $\lambda_3 y\cos(x) + \lambda_4 y\sin(x) + \lambda_5 z\cos(x) + \lambda_6 z\sin(x)$.

Pour $(x,y,z) = (0,1,0)$, on obtient : $\lambda_3 = 0$.

Pour $(x,y,z) = (\pi/2,1,0)$, on obtient : $\lambda_4 = 0$.

Pour $(x,y,z) = (0,0,1)$, on obtient : $\lambda_5 = 0$.

Pour $(x,y,z) = (\pi/2,0,1)$, on obtient : $\lambda_6 = 0$.

Ainsi : $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \cdots, \lambda_6) = (0, \cdots, 0)$.

Ainsi $\mathcal{B}$ est libre, donc c'est une base de G.

2. Démontrons que ϕ_1 est un endomorphisme de G.

• La **linéarité** de ϕ_1 découle de celle du gradient et de la bilinéarité du produit scalaire. Plus précisément, si $(f,g) \in G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \phi_1(f+\lambda g) &= \phi_{\vec{u}}(f+\lambda g) = \vec{u}\cdot\nabla(f+\lambda g) \\ &= \vec{u}\cdot(\nabla(f)+\lambda\nabla(g)) \text{ car le gradient est linéaire} \\ &= \vec{u}\cdot\nabla(f)+\lambda\vec{u}\nabla(g) \text{ par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \phi_{\vec{u}}(f)+\lambda\phi_{\vec{u}}(g) \end{aligned}$$

Alors : $\phi_1(f+\lambda g) = \phi_1(f) + \lambda\phi_1(g)$.

• Comme G =Vect$\{\mathcal{B}\}$, pour **justifier que** $\phi_1 \in \mathcal{L}(G)$, il suffit que montrer que : $\forall i$ entier entre 1 et 6, $\phi_1(f_i) \in G$.

Remarquons que : $\forall f \in G,\ \phi_1(f) = \vec{u}\cdot\nabla(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rl} \phi_1(f_1) = -f_2\ ; & \phi_1(f_2) = f_1 \\ \phi_1(f_3) = f_1 - f_4\ ; & \phi_1(f_4) = f_2 + f_3 \\ \phi_1(f_5) = f_1 - f_6\ ; & \phi_1(f_6) = f_2 + f_5 \end{array}$$

• En conclusion, ϕ_1 est linéaire et $\phi_1(\mathcal{B}) \subset G$ donc $\phi_1 \in \mathcal{L}(G)$.

3-a Déterminons la matrice A de ϕ_1 dans la base $\mathcal{B}$, puis calculons A^2.

D'après les calculs de la questions précédente, la matrice A de ϕ_1 dans la base $\mathcal{B}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer A^2 on peut soit faire soigneusement le calcul matriciel, soit calculer $\phi_1^2(f_i)$ pour $i = 1, ..6$.

$\phi_1^2(f_1) = \phi_1(-f_2) = -f_1$
$\phi_1^2(f_2) = \phi_1(f_1) = -f_2$
$\phi_1^2(f_3) = \phi_1(f_1 - f_4) = -f_2 - (f_2 + f_3) = -2f_2 - f_3$
$\phi_1^2(f_4) = \phi_1(f_2 + f_3) = f_1 + f_1 - f_4 = 2f_1 - f_4$
$\phi_1^2(f_5) = \phi_1(f_1 - f_6) = -f_2 - (f_2 + f_5) = -2f_2 - f_5$
$\phi_1^2(f_6) = \phi_1(f_2 + f_5) = 2f_1 - f_6$

On en déduit :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3-b • Sans calcul, donnons les valeurs propres de A^2 et dire si A^2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

La matrice A^2 est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi Sp(A^2) $= \{-1\}$.

Raisonnons par l'absurde. Si A^2 était diagonalisable, il existerait donc une matrice P inversible telle que $P^{-1}A^2P = D$ où D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres sur la diagonale; ainsi on aurait $P^{-1}A^2P = (-1)I_6$. Donc on pourrait écrire $A^2 = P(-1)I_6P^{-1} = -I_6$ et donc A^2 serait diagonale, ce qui n'est pas le cas. Ainsi A^2 n'est pas diagonalisable dans **R**.

• Qu'en est-il de A ?

Si A était diagonalisable, il existerait une matrice Q inversible et une matrice Δ diagonale telles que $Q^{-1}AQ = \Delta$ et l'on pourrait écrire $A^2 = Q\Delta Q^{-1}Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta^2Q^{-1}$ avec Δ^2 digonale. Donc A^2 serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.
Ainsi A n'est pas diagonalisable dans **R**.

3-c De quelle(s) équation(s) aux dérivées partielles les vecteurs propres de $\phi_1^2 = \phi_1 \circ \phi_1$ sont-ils solutions ?

Soit f un vecteur propre de ϕ_1. Comme la seule valeur propre de ϕ_1 est -1, f vérifie : $\phi_1^2(f) = -f$.

$$\begin{aligned} \phi_1^2(f) &= \phi_1\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

Or f est de classe C^2 donc d'après le théorème d'Hermann Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\text{ et }\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$\phi_1^2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right).$$

Ainsi l'équation aux dérivées partielles vérifiée par les vecteurs propres de ϕ_1 est :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)+f=0.$$

3-d Déterminons l'ensemble des fonctions f solutions de l'équation $\phi_1^2(f)+f=0$.
Indication : on cherchera des vecteurs colonnes X qui vérifient $A^2X=-X$.
Chercher les solutions dans G de « $\phi_1^2(f)+f=0$ »revient à chercher les vecteurs propres de A^2, c'est à dire les éléments de Ker (A^2+I_6). Posons $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}$. Alors :

$$X\in \mathrm{Ker}\,(A^2+I_6)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&2&0&2\\0&0&-2&0&-2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d+f=0\text{ et }c+e=0.$$

$$\Leftrightarrow X=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Ker}\,(A^2+I_6)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Cette famille est libre de manière évidente, donc c'est une base de l'espace propre. En revenant à l'application linéaire ϕ_1^2 associée à la matrice A^2 dans la base $\mathcal{B}$, on obtient :

$$\phi_1^2(f)+f=0\Leftrightarrow f\in \mathrm{Vect}\,\{f_1;f_2;f_3-f_5;f_4-f_6\}.$$

PARTIE III

Soit f une fonction non nulle de E. On note S la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. On suppose que les fonctions f choisies dans la suite sont telles que la surface S est non vide et qu'au moins un point de S est régulier.

Nous allons nous intéresser à quelques fonctions f de E telles que en tout point régulier M de S, le vecteur normal au plan tangent à S en M est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

1-a Donnons la définition d'un point régulier M_0 de S puis donnons une équation du plan tangent à S en ce point M_0. On notera (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0.

On dit que M_0 est régulier lorsque $\nabla(f)(M_0) \neq 0$.

Lorsque M_0 est régulier, $\nabla(f)(M_0)$ est un vecteur normal au plan tangent, que l'on notera π_{M_0}. Ainsi

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \pi_{M_0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \nabla(f)(M_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \nabla(f)(M_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0. \end{aligned}$$

ce qui est une équation cartésienne du plan tangent à S en M_0.

1-b • Lorsque f est définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$ et M_0 est le point de coordonnées $(1, -1, 1)$, donnons une équation du plan tangent à S au point M_0.

On suppose que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$ et M_0 est le point de coordonnées $(1, -1, 1)$. Alors $\nabla(f)(x,y,z) = (2x, 4y, -2z)$ et donc $\nabla(f)(M_0) = (2, -4, -2)$; M_0 est régulier.

Une équation cartésienne du plan tangent à S en M_0 est $2(x-1) - 4(y+1) - 2(z-1) = 0$ c'est à dire :

$$2x - 4y - 2z - 4 = 0.$$

• Cette fonction f répond-t-elle au problème ?

Enfin $\nabla(f)(M_0) \cdot \vec{u} = -4 \neq 0$ donc cette fonction f ne répond pas au problème.

2-a • Soit F_1 la fonction définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, F_1(x,y,z) = (y-z)^2 - \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$?. La fonction $f = F_1$ répond-elle au problème ?

On suppose que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = F_1(x,y,z) = (y-z)^2 - \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\nabla(f)(x,y,z) = (0, 2(y-z), -2(y-z)) = 2(y-z) \cdot (0, 1, -1)$.

Tous les points $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tels que $y_0 \neq z_0$ sont donc réguliers. En chacun de ces points, la normale au plan tangent est de plus dirigée par le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(0, 1, -1)$. Ce vecteur étant orthogonal à $\vec{u}$, la fonction $f = F_1$ répond au problème.

• Décrivons la surface associée.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in S &\Leftrightarrow (y-z)^2 = \alpha \Leftrightarrow |y - z| = \alpha \text{ avec } \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow y - z = \sqrt{\alpha} \text{ ou bien } y - z = -\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, on peut dire que $\sqrt{\alpha} \neq -\sqrt{\alpha}$ et donc :

$$S \text{ est la réunion des deux plans d'équations respectives } y - z = \sqrt{\alpha} \text{ et } y - z = -\sqrt{\alpha}.$$

N.B. : ce sont des plans parallèles.

2-b Soit g une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Vérifions que la fonction f, définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = g(x-y, x-z)$ répond au problème.

Soit g une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit f définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = g(x-y, x-z)$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ (composition de fonctions de classe C^1) et de plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \partial_1 g(x-y, x-z) + \partial_2 g(x-y, x-z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -\partial_1 g(x-y, x-z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -\partial_2 g(x-y, x-z) \end{aligned}$$

Donc $\nabla(f)(x,y,z) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 0$.

Ainsi, en tout point régulier M_0 de S , le vecteur $\nabla(f)(M_0)$ est normal au plan tangent et est orthogonal à $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Donc la fonction f répond au problème.

2-c La fonction F_1 est-elle de la forme précédente ?

Si l'on pose $g(u,v) = (v-u)^2 - \alpha$, alors $g(x-y, x-z) = (x - z - (x-y))^2 - \alpha = (y-z)^2 - \alpha = F_1(x,y,z)$. La fonction F_1 est bien de la forme précédente.

3-a Soit $\Gamma_1 = S \cap \Pi$ où S est la surface $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$ et Π est le plan d'équation $x+y+z=0$.
On considère les vecteurs $\vec{e_3} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k}-\vec{i})$, et $\vec{e_2} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_1}$.
On note P la matrice de passage de $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$.

- Écrivons P.

On a : $\vec{e_3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$ et $\vec{e_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$ et donc :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- Vérifions que P est une matrice de rotation dont on donnera l'axe et le cosinus de son angle.

Les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_3}$ sont de norme 1 et de plus $\vec{e_1} \perp \vec{e_3}$.

Comme $\vec{e_2} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_1}$, on en déduit que $(\vec{e_3},\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$; puis, par permutation circulaire : $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ est aussi une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.

P étant la matrice de passage d'une base orthonormée directe à une autre, P est une matrice de rotation.

Remarque. Le lecteur courageux ou inconscient fera le calcul du déterminant et trouvera après épuisement 1.

Pour l'axe, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on résout :

$$PX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x\sqrt{3}+y+z\sqrt{2} & = & x\sqrt{6} \\ -2y+z\sqrt{2} & = & y\sqrt{6} \\ x\sqrt{3}+y+z\sqrt{2} & = & x\sqrt{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x(\sqrt{3}+\sqrt{6})+y+z\sqrt{2} & = & 0 \\ -(2+\sqrt{6})y+z\sqrt{2} & = & 0 \\ x\sqrt{3}+y+z(\sqrt{2}-\sqrt{6}) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Il ressort en faisant la différence des deux premières lignes,

$$x = \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)y.$$

De même, $z = \dfrac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}y = (\sqrt{2}+\sqrt{3})y$. Il reste :

$$(x,y,z) = \Big((\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)y, y, (\sqrt{2}+\sqrt{3})y\Big).$$

Une base de l'axe est $\left(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-\sqrt{2},\ 1\right)$.
De plus :

$$1+2\cos\theta = -\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-3}{4} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}.$$

- Que vaut P^{-1} ?

On a tout simplement : $P^{-1} = P^T$.

3-b Démontrons qu'un système d'équations de la courbe Γ_1 dans le repère $(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ est

$$\left\{ \begin{array}{c} 5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2 \\ Z = 0 \end{array} \right. ,$$

où (X,Y,Z) désignent les coordonnées d'un point M dans le repère $(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$.

Indication : on rappelle que si (x,y,z) sont les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ainsi $Z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$ donc la condition « $x+y+z=0$ »s'écrit « $Z=0$ ».

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(x-z)^2+(y-z)^2 &= \left(\frac{-X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}}-\left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}}\right)\right)^2+\left(\frac{-2Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}}-\left(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}}\right)\right)^2\\ &= \left(-\sqrt{2}X\right)^2+\left(\frac{-X}{\sqrt{2}}-\frac{3Y}{\sqrt{6}}\right)^2\\ &= 2X^2+X^2/2+3Y^2/2+\sqrt{3}XY\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(x-z)^2+(y-z)^2=1 \Leftrightarrow 2X^2+X^2/2+3Y^2/2+\sqrt{3}XY=1 \Leftrightarrow 5X^2+3Y^2+2\sqrt{3}XY=2.$$

Ainsi :

$$M \in S\cap\Pi \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ (x-z)^2+(y-z)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z=0 \\ 5X^2+3Y^2+2\sqrt{3}XY=2 \end{cases}$$

3-c On pose $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, vérifions que l'équation $5X^2+2\sqrt{3}XY+3Y^2=2$ s'écrit : $U^TAU=2$, où $A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$U^TAU = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5X+Y\sqrt{3} & X\sqrt{3}+3Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow U^TAU = X(5X+Y\sqrt{3})+Y(X\sqrt{3}+3Y) = 5X^2+3Y^2+XY2\sqrt{3}=2.$$

3-d On pose $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Reconnaissons l'isométrie plane associée à Q et déduisons sans calculs Q^{-1}.

On remarque que c'est une rotation plane d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et Q^{-1} est la rotation plane d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

3-e Calculons $D = Q^{-1}AQ$.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Et finalement : $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3-f On pose $\vec{I} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1+\dfrac{1}{2}\vec{e}_2$ et $\vec{J} = -\dfrac{1}{2}\vec{e}_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2$ et $U' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = Q^{-1}U$.

- Calculons $(U')^T DU'$.

$$(U')^T DU' = \left(Q^{-1}U\right)^T DQ^{-1}U = U^TQDQ^{-1}U = U^TQ(Q^{-1}AQ)Q^{-1}U = U^TAU = 2.$$

- Déduisons en que dans $(0, \vec{I}, \vec{J})$, Γ_1 a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} X' &= \alpha \cos t \\ Y' &= \beta \sin t \end{cases},$$

où $t \in [0, 2\pi[$ et α, β sont à déterminer.
On peut écrire, d'après plus haut :

$$(U')^T DU' = \begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6X' & 2Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$(U')^T DU' = 2 = 6X'^2 + 2Y'^2 \Rightarrow 3X'^2 + Y'^2 = 1.$$

$$3X'^2 + Y'^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X'^2}{\frac{1}{3}} + Y'^2 = 1$$

Donc on pose $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\beta = 1$.

3-g Étudions l'arc paramétré $t \mapsto (\alpha \cos t, \beta \sin t)$,
avec les valeurs α et β trouvées, puis dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, dessinons les axes OX' et OY' puis Γ_1.

Dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, étudions l'arc. On remarque que les fonctions $t \mapsto X'(t)$ et $t \mapsto Y'(t)$ sont de période 2π. On prend $t \in [-\pi, \pi]$. Puis comme X' est paire et Y' est impaire, on se ramène à $t \in [0, \pi]$ et on effectuera une symétrie par rapport à OX'. Puis $X'(\pi - t) = -X'(t)$ et $Y'(\pi - t) = Y'(t)$, donc on peut se ramener à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et on effectuera une symétrie par rapport à OY'.
On a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $X'(t)$ décroit de $1/\sqrt{3}$ à 0 et $Y'(t)$ croit de 0 à 1. La pente de la tangente en $t = 0$ est verticale et est horizonle en $t = \frac{\pi}{2}$.