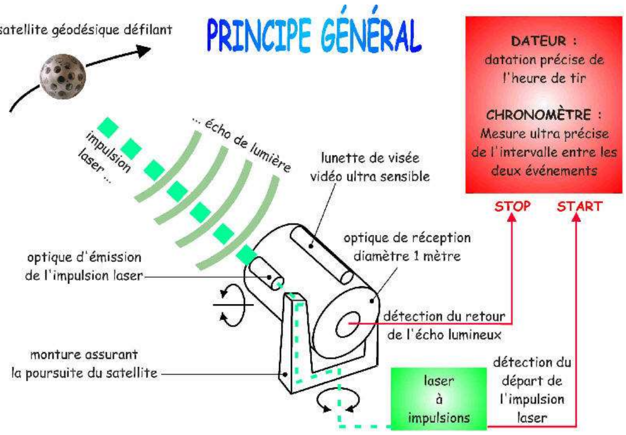
Bilan d'énergie en électromagnétisme

1 Energie électromagnétique du champ électromagnétique

Approche qualitative

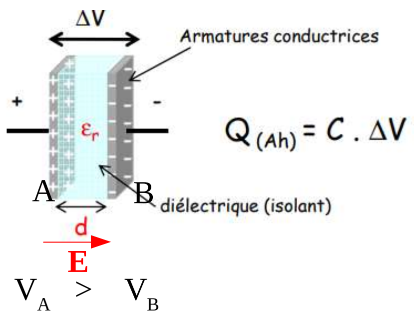
Considérons par exemple un laser émettant une impulsion très brève en direction de la lune , cette impulsion contient de l'énergie.

Il existe un laps de temps pendant lequel l'énergie a déjà quitté le laser et n'est pas encore absorbée par le détecteur.



Le principe général de conservation de l'énergie exige que cette énergie soit quelque part : **elle est localisée dans la région de l'espace où règne le champ électromagnétiques**

Expression dans le cas du condensateur



L'énergie électrostatique stockée a pour expression :

$E_{em}=1/2CU^2$ **U**$=V_A-V_B=\int_A^B \vec{E}.d\vec{l} = \int_A^B E*dl$ **=E*d**

$\boxed{C=\epsilon_0\frac{S}{d}}$ dans le vide $\boxed{E_{em}=1/2CU^2=\frac{1}{2}\epsilon_0 S*d E^2}$

L'énergie électrostatique **volumique** a pour expression :
(on suppose le volume des électrodes négligeable)

$$\boxed{u_{em}=\frac{E_{em}}{volume}=\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$$ dans le vide

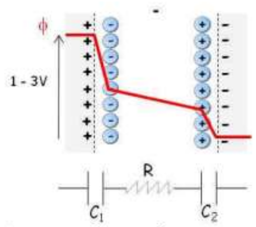
$$\boxed{u_{em}=\frac{E_{em}}{volume}=\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E^2}$$

On souhaite réaliser un condensateur avec un diélectrique composé de polypropylène de permittivité relative $\varepsilon_r=2,2$ afin d'éviter un claquage(destruction de l'isolant suite à l'application d'un champ électrique trop important) on se restreint à un champ électrique de $E_{max}=70MVm^{-1}$
$\varepsilon_0=8,85.10^{-12}$ SI
1)Quelle est la densité maximale d'énergie électromagnétique stockée ?
$U_{em}=4,425*2,2.10^{-12}(70.10^6)^2=4,425*2,2*(70)^2=47,7$ kJ.m^{-3}
2)Quelle doit être l'épaisseur e du diélectrique pour une différence de potentiel $U_{max}=350V$?
e= 5 10^{-6} m (350/(70 10^6)=35/7 10^{-6})
3)Estimer la capacité par unité de surface d'un tel condensateur ?

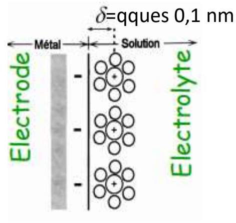
$$\boxed{\frac{C}{S}=\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{e}=3,9\mu F.m^{-2}}$$

Pourquoi un supercondensateur peut-il stocker une densité volumique d'énergie maximale plus élevée ?

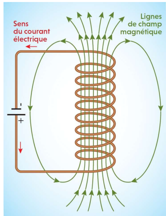
$C_{dl} \approx 10\text{-}20\ \mu F/cm^2$



Circuit équivalent simplifié



Expression dans le cas d'une bobine en régime quasi-stationnaire*



$$P = Ui = L\frac{di}{dt} * i \qquad E = \int_{\Delta t} P\,dt = \int_{\Delta t} Ui\,dt = \int_{\Delta t} L\frac{di}{dt} * i\,dt = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_{\Delta t} \qquad E_{em} = 1/2\ Li^2$$

$B = \mu_0\, ni = \mu_0\, N/\ell\, i$

Donner l'expression de l'inductance L d'un solénoïde infini (N spires, longueur ℓ, surface S)

$\phi_{propre} = NBS = Li \qquad N(\mu_0\, N/\ell\, i)S = Li \qquad L = (\mu_0\, N^2/\ell)S$

Déterminer la densité volumique d'énergie magnétique

$u_{emmagnétique} = ¿¿$

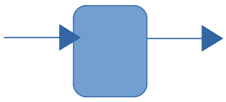
$E_{em} = 1/2\ Li^2 = \mu_0\, N^2/2\ell S\ \ i^2 \quad$ avec $i = B\ell/\mu_0 N$

$E_{em} = 1/2\ Li^2 = (\mu_0\, N^2/2\ell) S\ (B\ell/\mu_0 N)^2 = 1/(2\mu_0)\, B^2 S l$

$$\boxed{u_{emmagnétique} = \frac{E_{em}}{volume} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

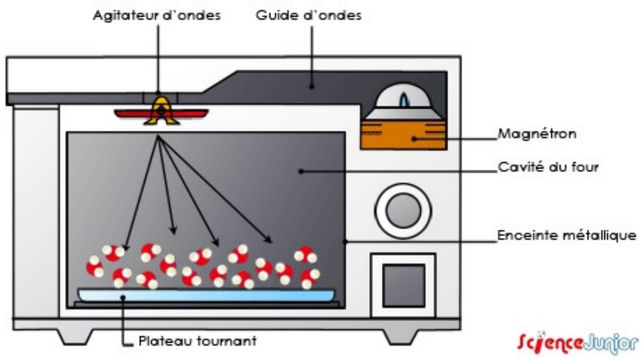
Expression dans la densité volumique d'énergie électromagnétique : u_{em}

$$\boxed{u_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$



2 Puissance électromagnétique cédée à la matière du champ électromagnétique

Dans un milieu conducteur, le champ électromagnétique **agit sur les charges mobiles et peut leur transférer de l'énergie**



Exemples

- Mise en mouvement des charges de l'antenne réceptrice d'un récepteur radio,

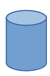
-**Effet joule dans un conducteur ohmique**

- Echauffement des aliments dans un four micro ondes

Expression de la puissance volumique cédée à la matière

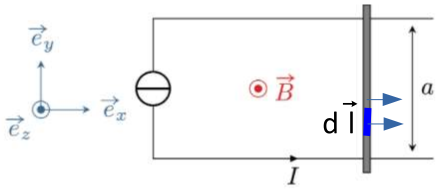
Action du champ électrique

Déterminer l'expression de la force volumique d'un champ électromagnétique sur la matière chargée et conductrice :

Sur une charge ponctuelle q : $q\vec{E}(M,t)$  $\vec{F} = q\vec{E} = \rho V \vec{E}(M,t)$

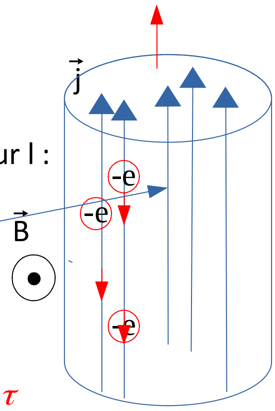
$$\boxed{\vec{f}_{volumique} = \rho \vec{E}(M,t)}$$

Action du champ magnétique Force de Laplace



Sur un élément un fil filiforme parcouru par I de longueur l :

$$\int_l I\, d\vec{l} \wedge \vec{B}(M,t)$$



Pour un élément de volume dτ=sdl

$$\int_l \vec{j}.\vec{s}\,d\vec{l} \wedge \vec{B}(M,t) = \int_l \vec{j}.s\,dl \wedge \vec{B}(M,t) = \int_l \vec{j}. \wedge \vec{B}(M,t)\,d\tau$$

Force magnétique volumique $\boxed{\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B}(M,t)}$

Force volumique $\boxed{\vec{f}_v = \rho \vec{E}(M,t) + \vec{j} \wedge \vec{B}(M,t)}$ ★

Puissance volumique reçue par la matière chargée

Puissance volumique $\boxed{p_v = \vec{f}_v.\vec{v} = (\rho_{mobile} \vec{E}(M,t) + \vec{j} \wedge \vec{B}(M,t)).\vec{v}}$

$\vec{f}_v$ appliquée aux charges mobiles de vitesse $\vec{v}$ et de densité de charge ρ_{mobile}

$\boxed{\vec{j} = n_{mobile} q \vec{v} = \rho_{mobile}.\vec{v}}$

$\boxed{p_v(M,t) = \vec{f}_v.\vec{v} = (\rho_{mobile} \vec{E}(M,t)).\vec{v} = \vec{j}.\vec{E}(M,t)}$

$\boxed{\vec{j} \wedge \vec{B}(M,t) = \rho_{mobile} \vec{v} \wedge \vec{B}}$ orthogonal au vecteur vitesse

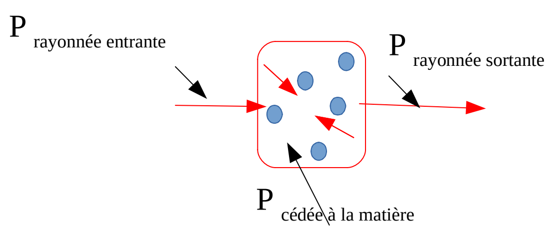
$\boxed{p_v = \vec{j}.\vec{E}}$ ★

3. Bilan: d'énergie électromagnétique dans un volume

Bilan macroscopique: dans un volume de contrôle choisi d'énergie électromagnétique $U_{em}(t)$

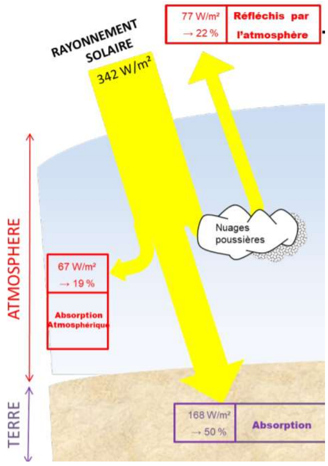
$$\boxed{U_{em}(t) = \iiint_V u_{em}\, d\tau}$$

$$\boxed{\frac{dU_{em}}{dt} = \Sigma P_{reçue} = -\Sigma P_{cédée} = -P_{cédée\,à\,la\,matière} + P_{rayonnée\,entrante} - P_{rayonnée\,sortante}}$$ ★



Pour une OPPMR, en moyenne $\boxed{\langle u_{em}\rangle=\frac{1}{2}\epsilon_0*\langle E^2\rangle+\frac{\langle B^2\rangle}{2\mu_0}=\frac{1}{2\epsilon_0}\frac{E_0^2}{2}+\frac{1}{2\mu_0}*\frac{B_0^2}{2}=constante}$

$\boxed{\langle U_{em}(t)\rangle=\iiint_V \langle u_{em}\rangle\, d\tau}$ **constante**



$\frac{d\langle U_{em}\rangle}{dt}=0$ $\boxed{P_{\text{cédée à la matière}}=P_{\text{absorbée}}=P_{\text{rayonnée entrante}}-P_{\text{rayonnée sortante}}}$

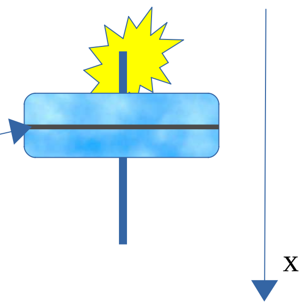
Montrons que localement ce bilan d'énergie se traduit par

$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{\pi}-\vec{j}.\vec{E}}$ ★

Soit un faisceau lumineux traversant la haute atmosphère

Haute atmosphère : plasma gaz de cations et anions mobiles

Bilan sur la tranche x-x+dx de section S



avec

- $u_{em}(x,t)$ énergie électromagnétique volumique de la tranche $\boxed{U_{em}=u_{em}*Sdx}$
- $p_v=\vec{j}.\vec{E}$ puissance volumique reçue à la matière $\boxed{P_{\text{cédée à la matière}}=p_v*Sdx=\vec{j}.\vec{E}*Sdx}$
- $\vec{\pi}.\vec{S}$ puissance traversant S

  $\boxed{P_{\text{traversant S en x}}=\vec{\pi}(x,t)*\vec{S}}$ et $\boxed{P_{\text{traversant S en x+dx}}=\vec{\pi}(x+dx,t)*\vec{S}}$

  avec $\vec{S}=S\vec{e}_x$ et $\vec{\pi}=\pi_x\vec{e}_x$

Calculs: $dU_{em}=(u_{em}(x,t+dt)-u_{em}(t,x))S*dx=\frac{\partial u_{em}}{\partial t}dt*Sdx$ $\boxed{\frac{dU_{em}}{dt}=\frac{\partial u_{em}}{\partial t}*Sdx}$

$$P_{\text{rayonnée entrante}}-P_{\text{rayonnée sortante}}=\pi_x(x,t)S-\pi(x+dx,t)_x*S=-\frac{\partial \pi_x}{\partial x}dx\,S$$

$\frac{dU_{em}}{dt}=-P_{\text{cédée à la matière}}+P_{\text{rayonnée entrante}}-P_{\text{rayonnée sortante}}$ **donne**

$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}*Sdx=-\vec{j}.\vec{E}*Sdx-\frac{\partial \pi_x}{\partial x}dx\,S}$ **soit** $\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}=-\vec{j}.\vec{E}-\frac{\partial \pi_x}{\partial x}}$ **cqfd**