Corrigé de l'épreuve de Mathématiques A du concours Banque PT, session 2020

Problème d'algèbre

Partie I

1. On a
$$^tA.A = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix}-8 & 4 & 1\\ 4 & 7 & 4\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8 & 4 & 1\\ 4 & 7 & 4\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{pmatrix} = I_3$$
car $(-8)^2+4^2+1^2 = 64+16+1 = 81$, $-8\times 4+4\times 7+4 = 4(-8+8) = 0$, $-8+4\times 4-8 = 0$ et $4^2+7^2+4^2 = 16+49+16 = 81$.
$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est donc orthogonale.}}$

2. (a) La matrice A est symétrique et à coefficients réels. D'après le théorème spectral, $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable}}$. De plus, $\boxed{\text{ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux}}$.

   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et soit λ une valeur propre de M. En notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors $\|f(x)\| = |\lambda|.\|x\|$, d'où $\|x\| = |\lambda|.\|x\|$ puisque f est une isométrie. Comme x n'est pas le vecteur nul, on a finalement $|\lambda| = 1$.
   En conclusion, $\boxed{\text{les seules valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonale sont 1 et } -1}$.

   (c) D'après ce qui précède, la matrice A est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{-1;1\}$.
   On a $A - I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-17 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 4\\ 1 & 4 & -17\end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient la relation $C_1 + 4C_2 + C_3 = 0$. La matrice $A - I_3$ est donc de rang au plus 2. Ses deux premières colonnes n'étant pas colinéaires, elle est de rang exactement 2. D'après le théorème du rang, son noyau est donc de dimension 1. Le réel 1 est donc valeur propre de A. Or, d'après la relation $C_1+4C_2+C_3 = 0$, la colonne $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ appartient à ce noyau. On a donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right)$.
   Ainsi, la matrice A est diagonalisable, son spectre est inclus dans $\{-1;1\}$ et le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ n'est pas égal à $\mathbb{R}^3$. Nécessairement, -1 est donc aussi valeur propre de A. On sait de plus que les deux sous-espaces propres, notés E_1 et E_{-1}, sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ étant orthogonaux à E_1, ils appartiennent à E_{-1} et, n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de E_{-1}. Or, par supplémentarité, on a $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 3$, d'où $\dim(E_{-1}) = 2$.
   $$\boxed{\text{En conclusion, les valeurs propres de } A \text{ sont 1 et } -1 \text{ et les sous-espaces propres associés sont respectivement } E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}\right).}$$
   Remarque. Une autre méthode consiste à résoudre les systèmes $AX = X$ et $AX = -X$.

3. La matrice A étant symétrique et orthogonale, on a $A^2 = {}^t A.A = I_3$ donc f est une symétrie. Plus précisément, sa base est E_1 et sa direction est E_{-1}. Ces sous-espaces étant orthogonaux, on en conclut que $\boxed{f \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right)}$.

Remarque. f est donc aussi la rotation d'angle π et d'axe E_1.

Partie II

1. En notant $v = u$, on a $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}$. Par définition de l'inverse, $\boxed{u \text{ est donc inversible}}$ d'inverse v, c'est-à-dire $\boxed{u^{-1} = u}$.
2. Soit $x \in E$. On a
$$u(x_+) \underset{\text{(linéarité)}}{=} \frac{1}{2}(u(x) + u(u(x))) \underset{(u\circ u=\mathrm{Id})}{=} \frac{1}{2}(u(x) + x) = x_+$$
donc $(u - \mathrm{Id})(x_+) = u(x_+) - x_+ = 0$. De même, on a
$$u(x_-) = \frac{1}{2}(u(x) - u(u(x))) = \frac{1}{2}(u(x) - x) = -x_-$$
donc $(u + \mathrm{Id})(x_-) = 0$.
On a ainsi bien $\boxed{x_+ \in E_u^+ \text{ et } x_- \in E_u^-}$.
3. Soit $x \in E_u^+ \cap E_u^-$. On a $u(x) = x$ et $u(x) = -x$ donc $x = -x$ et $x = 0$. Les sous-espaces E_u^+ et E_u^- sont donc en somme directe.
De plus, d'après la question précédente, pour tout $x \in E$, on a $x = x_+ + x_-$ avec $x_+ \in E_u^+$ et $x_- \in E_u^-$. On a donc $E \subset E_u^+ + E_u^-$.
L'inclusion réciproque étant évidente, on en conclut que $\boxed{E = E_u^+ \oplus E_u^-}$.
4. Comme E est la somme directe de deux sous-espaces propres de u (ou égal à un sous-espace propre de u si E_u^+ ou E_u^- est réduit à $\{0\}$), $\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ est diagonalisable}}$.
5. On suppose d'abord que u est une isométrie. Pour tout $x \in E_u^+$ et tout $y \in E_u^-$, on a
$$\langle x, y\rangle \underset{\text{(isométrie)}}{=} \langle u(x), u(y)\rangle \underset{(u(x)=x,\, u(y)=-y)}{=} \langle x, -y\rangle \underset{\text{(bilinéarité)}}{=} -\langle x, y\rangle$$
d'où $\langle x, y\rangle = 0$. On a donc $E_u^+ \perp E_u^-$.
Réciproquement, on suppose que $E_u^+ \perp E_u^-$. Soit $x \in E$. D'après la question 2, en notant $x_+ = \frac{1}{2}(x + u(x))$ et $x_- = \frac{1}{2}(x - u(x))$, on a $x_+ \in E_u^+$ et $x_- \in E_u^-$ tels que $x = x_+ + x_-$. D'après le théorème de Pythagore, on a donc
$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x_+ + x_-\|^2 = \|x_+\|^2 + \|x_-\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x\|^2 + 2\langle x, u(x)\rangle + \|u(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, u(x)\rangle + \|u(x)\|^2\right) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|u(x)\|^2 .\end{aligned}$$
On a donc $\|x\|^2 = \|u(x)\|^2$, d'où $\|u(x)\| = \|x\|$. Comme u est un endomorphisme, on en conclut que c'est une isométrie.
En conclusion, $\boxed{u \text{ est une isométrie si et seulement si } E_u^+ \perp E_u^-}$.

Partie III

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a
$$\begin{aligned}\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2x - z - t = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z + 2x - z = 0 \\ t = 2x - z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2z \\ t = 2x - z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = x.(1, 3, 0, 2) + z.(0, -2, 1, -1) .\end{aligned}$$
On a ainsi $F = \{x.(1, 3, 0, 2) + z.(0, -2, 1, -1),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 3, 0, 2), (0, -2, 1, -1))$ et, en tant que sous-espace engendré, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

2. On a $1-1-1+1=0$ et $2\times 1-1-1=0$ donc $\boxed{\tilde{u}_1 \text{ appartient à } F}$.
De plus, soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{cases}(x,y,z,t)\in F\\(x,y,z,t)\perp\tilde{u}_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2z\\t=2x-z\\x+y+z+t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2z\\t=2x-z\\6x-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3x\\z=3x\\t=-x\end{cases}.$$

En particulier, le vecteur $\tilde{u}_2=(1,-3,3,-1)$ appartient à F et il est orthogonal à $\tilde{u}_1$.
Puisque $\|\tilde{u}_1\|=2$ et $\|\tilde{u}_2\|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, les vecteurs $\boxed{u_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)}$ et $\boxed{u_2=\frac{1}{2\sqrt{5}}(1,-3,3,-1)}$ forment une famille orthonormale de F.
Or, F est de dimension 2 en tant que sous-espace engendré par deux vecteurs non colinéaires. $\boxed{\text{La famille } (u_1,u_2) \text{ constitue donc une base orthonormale de } F}$.

3. La famille (u_1,u_2) est une base de F et on a $\langle\tilde{u}_3,u_1\rangle=\frac{1}{2}(1-1-1+1)=0$ et $\langle\tilde{u}_3,u_2\rangle=\frac{1}{2\sqrt{5}}(1+3-3-1)=0$. Ainsi, $\boxed{\text{le vecteur } \tilde{u}_3 \text{ appartient à } F^\perp}$.
De plus, soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{cases}(x,y,z,t)\perp\tilde{u}_1\\(x,y,z,t)\perp\tilde{u}_2\\(x,y,z,t)\perp\tilde{u}_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+t=0\\x-3y+3z-t=0\\x-y-z+t=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+t=0\\-4y+2z-2t=0\\-2y-2z=0\end{cases}\qquad\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=-y\\t=-3y\\x=3y\end{cases}.$$

Ainsi, en notant $\tilde{u}_4=(3,1,-1,-3)$, la famille $(\tilde{u}_i)_{1\le i\le 4}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
Puisque $\|\tilde{u}_3\|=2$ et $\|\tilde{u}_4\|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, en notant $\boxed{u_3=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)}$ et $\boxed{u_4=\frac{1}{2\sqrt{5}}(3,1,-1,-3)}$, on obtient que la famille $(u_i)_{1\le i\le 4}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^4$ et, en particulier, libre dans $\mathbb{R}^4$. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3,u_4) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^4}$.

4. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}'$ la base (u_1,u_2,u_3,u_4). Relativement à la base $\mathcal{B}'$, la matrice de s est $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$. Par ailleurs, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est
$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{5}}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2\sqrt{5}}\\\frac{1}{2}&\frac{-3}{2\sqrt{5}}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{5}}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2\sqrt{5}}&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2\sqrt{5}}\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2\sqrt{5}}&\frac{1}{2}&\frac{-3}{2\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ et cette matrice est orthogonale car les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées.
D'après la formule de changement de bases, la matrice de s relativement à la base $\mathcal{B}$ est donc

$$PD{}^tP=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{5}}&\frac{-1}{2}&\frac{-3}{2\sqrt{5}}\\\frac{1}{2}&\frac{-3}{2\sqrt{5}}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2\sqrt{5}}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2\sqrt{5}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{5}}\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2\sqrt{5}}&\frac{-1}{2}&\frac{3}{2\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{5}}&\frac{-3}{2\sqrt{5}}&\frac{3}{2\sqrt{5}}&\frac{-1}{2\sqrt{5}}\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{3}{2\sqrt{5}}&\frac{1}{2\sqrt{5}}&\frac{-1}{2\sqrt{5}}&\frac{-3}{2\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2&1&4&2\\1&2&-2&4\\4&-2&2&1\\2&4&1&-2\end{pmatrix}}.$$

5. On note $H_1=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $H_2=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_4)$. H_1 et H_2 sont engendrés par une famille libre de 3 vecteurs donc ce sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$. On note r_1 et r_2 la réflexion par rapport

à H_1 et H_2 respectivement.

Relativement à la base $\mathcal{B}'$, la matrice de r_1 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et celle de r_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la matrice de $r_1 \circ r_2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Puisque s et $r_1 \circ r_2$ ont la même matrice relativement à $\mathcal{B}'$, on a $\boxed{s = r_1 \circ r_2}$.

Partie IV

1. On suppose que $p_f = 1$, c'est-à-dire $\dim(F_f) = n - 1$ (F_f est donc un hyperplan de E). Puisque F_f est de dimension finie, ce sous-espace admet une base orthonormale notée $(e_1, \dots, e_{n-1})$ et un supplémentaire orthogonal, de dimension 1, de base orthonormale notée (e_n). Puisque f est une isométrie et F_f est stable par f, le sous-espace $F_f^\perp$ est aussi stable par f, donc $f(e_n) \in \mathrm{Vect}(e_n)$, c'est-à-dire e_n est un vecteur propre de f (car $e_n \neq 0$). Or, d'une part, les seules valeurs propres réelles possibles pour f sont 1 et -1 et, d'autre part, e_n n'appartient pas au sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (qui est F_f). On a donc $f(e_n) = -e_n$.
En conclusion, on a $E = F_f \oplus F_f^\perp$ avec $f(x) = x$ pour tout $x \in F_f$ et $f(x) = -x$ pour tout $x \in F_f^\perp$. L'application linéaire f est donc la symétrie par rapport à F_f et parallèlement à $F_f^\perp$. Autrement dit, f est la réflexion par rapport à F_f.
$\boxed{\text{Le résultat de décomposition d'une isométrie en composée de réflexions est donc vrai pour } p_f = 1.}$

2. (a) $F_g^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - \dim(F_g) = p_g \geq 2$. On a donc $\boxed{F_g^\perp \neq \{0\}}$.

   (b) Soit $x_0 \in F_g^\perp \setminus \{0\}$ et soit $y_0 = g(x_0)$.
   On a $F_g \cap F_g^\perp = \{0\}$ donc $x_0 \notin F_g$, donc $g(x_0) \neq x_0$, c'est-à-dire $\boxed{y_0 \neq x_0}$.
   Par ailleurs, g est une isométrie et F_g est stable par g donc $F_g^\perp$ est stable par g. Puisque $x_0 \in F_g^\perp$, on en déduit que $\boxed{y_0 \in F_g^\perp}$.

   (c) Soit $x \in F_g$. Comme $F_g^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, $x_0 - y_0$ appartient à $F_g^\perp$, donc x est orthogonal à $x_0 - y_0$, donc x appartient à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(x_0 - y_0)$. On a donc $\boxed{F_g \subset (\mathrm{Vect}(x_0 - y_0))^\perp}$.
   Or, r est la réflexion par rapport à $(\mathrm{Vect}(x_0 - y_0))^\perp$ donc $F_r = (\mathrm{Vect}(x_0 - y_0))^\perp$. On a donc $\boxed{F_g \subset F_r}$.
   Ainsi, pour tout $x \in F_g$, on a $x \in F_r$ donc
   $$r \circ g(x) \underset{(x \in F_g)}{=} r(x) \underset{(x \in F_r)}{=} x\,,$$
   d'où $x \in F_{r \circ g}$. On a donc bien $\boxed{F_g \subset F_{r \circ g}}$.

   (d) On a
   $$\begin{aligned} \langle x_0 - y_0, x_0 + y_0 \rangle &= \langle x_0, x_0 \rangle - \langle y_0, x_0 \rangle + \langle x_0, y_0 \rangle - \langle y_0, y_0 \rangle \qquad \text{(bilinéarité)} \\ &= \|x_0\|^2 - \|y_0\|^2 \qquad \text{(symétrie)} \\ &= \|x_0\|^2 - \|g(x_0)\|^2 \\ &= 0 \qquad (g \text{ est une isométrie}) \end{aligned}$$
   donc $\boxed{(x_0 - y_0) \perp (x_0 + y_0)}$.
   Ensuite, r étant la réflexion par rapport à $(\mathrm{Vect}(x_0 - y_0))^\perp$, on a $r(x_0 - y_0) = -(x_0 - y_0)$, soit

$\boxed{r(x_0 - y_0) = y_0 - x_0}$. De plus, x_0+y_0 appartient à $(\mathrm{Vect}(x_0-y_0))^\perp$ donc $\boxed{r(x_0 + y_0) = x_0 + y_0}$. En soustrayant les deux relations précédentes, on a $r(x_0-y_0)-r(x_0+y_0) = (y_0-x_0)-(x_0+y_0)$ donc, par linéarité de r, on a $-2r(y_0) = -2x_0$, soit $\boxed{r(y_0) = x_0}$.

(e) On a $F_g \subset F_{r\circ g}$ d'après la question 2(c). De plus, x_0 vérifie $x_0 \notin F_g$ et $r \circ g(x_0) = r(y_0) = x_0$ d'où $x_0 \in F_{r\circ g}$. L'inclusion $F_g \subset F_{r\circ g}$ est donc stricte. Ainsi, on a $\dim(F_g) < \dim(F_{r\circ g})$, d'où $\boxed{p_{r\circ g} < p_g}$.

(f) L'application $r \circ g$ est une isométrie en tant que composée d'isométries. De plus, on a $p_{r\circ g} < p_g = k$. Par hypothèse de récurrence, il existe un entier $m \leq p_{r\circ g}$ et m réflexions $r_1, \ldots, r_m$ telles que $r \circ g = r_1 \circ \ldots \circ r_m$. Or, une réflexion est bijective de réciproque elle-même donc, en composant par r, on a $g = r \circ r_1 \circ \ldots \circ r_m$.
De plus, on a $p_{r\circ g} < p_g$ avec $p_{r\circ g}$ et p_g entiers, donc $p_{r\circ g} + 1 \leq p_g$. En notant $\ell = m + 1$, on a donc $\ell \leq p_{r\circ g} + 1 \leq p_g = k$.
$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ peut s'écrire comme la composée de } \ell \text{ réflexions avec } \ell \leq k}$.

Par récurrence forte sur p_f, le résultat de décomposition d'une isométrie comme composée de réflexions est ainsi démontré.

Problème de probabilités

1. On a $X_1 = a + R_1$ donc X_1 peut prendre les valeurs $a+1$ et $a-1$. Plus précisément, on a $\mathbb{P}(X_1 = a+1) = \mathbb{P}(R_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = a-1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = a+1) = 1 - p = q$.
$\boxed{\text{La loi de } X_1 \text{ est donc donnée par } \mathbb{P}(X_1 = a+1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = a-1) = q.}$

   Ensuite, on a $X_2 = X_1 + R_2$ donc X_2 peut prendre les valeurs $a+2$, a et $a-2$. On a

$$\{X_2 = a+2\} = \{X_1 = a+1\} \cap \{R_2 = 1\} = \{R_1 = 1\} \cap \{R_2 = 1\}$$

   donc, par indépendance de R_1 et R_2, on a $\mathbb{P}(X_2 = a+2) = \mathbb{P}(R_1 = 1)\mathbb{P}(R_2 = 1) = p^2$.
   De même, on a $\mathbb{P}(X_2 = a-2) = \mathbb{P}(R_1 = -1)\mathbb{P}(R_2 = -1) = q^2$. On a alors

$$\mathbb{P}(X_2 = a) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = a+2) - \mathbb{P}(X_2 = a-2) = 1 - p^2 - q^2 = 2pq$$

   puisque $p + q = 1$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la loi de } X_2 \text{ est donnée par } \mathbb{P}(X_2 = a+2) = p^2,\ \mathbb{P}(X_2 = a) = 2pq \text{ et } \mathbb{P}(X_2 = a-2) = q^2}$.

   Enfin, on a $\mathbb{P}(X_1 = a+1) = p > 0$, $\mathbb{P}(X_2 = a-2) = q^2 > 0$ alors que

$$\mathbb{P}(X_1 = a+1,\ X_2 = a-2) = \mathbb{P}(R_1 = 1,\ R_2 = -3) = 0\,.$$

   On a donc $\mathbb{P}(X_1 = a+1,\ X_2 = a-2) \neq \mathbb{P}(X_1 = a+1)\mathbb{P}(X_2 = a-2)$, ce qui montre que $\boxed{\text{les variables aléatoires } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montre l'existence et l'unicité de ϕ_n par analyse-synthèse. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à l'expérience aléatoire. On constate que, par une récurrence triviale, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $X_k = a + \sum_{i=1}^{k} R_i$.
   - Analyse. On suppose qu'il existe une application $\phi_n : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{Z}^n$ telle que

$$(X_1, \dots, X_n) = \phi_n(R_1, \dots, R_n)\,.$$

     Soit $(r_1, \dots, r_n) \in \{-1, 1\}^n$. Il existe $\omega \in \Omega$ tel que $(r_1, \dots, r_n) = (R_1(\omega), \dots, R_n(\omega))$. On a donc nécessairement

$$\begin{aligned}\phi_n(r_1, \dots, r_n) &= \phi_n(R_1(\omega), \dots, R_n(\omega)) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \\ &= \left(a + R_1(\omega),\ \dots,\ a + \sum_{i=1}^{n} R_i(\omega)\right) = \left(a + r_1,\ \dots,\ a + \sum_{i=1}^{n} r_i\right)\,.\end{aligned}$$

   - Synthèse. Réciproquement, l'application $\psi_n : (r_1, \dots, r_n) \mapsto \left(a + r_1, \dots, a + \sum_{i=1}^{n} r_i\right)$ vérifie clairement $(X_1, \dots, X_n) = \psi_n(R_1, \dots, R_n)$.

   $\boxed{\begin{array}{l}\text{En conclusion, on a montré par analyse-synthèse qu'il existe une unique application } \phi_n : \\ \{-1,1\}^n \to \mathbb{Z}^n \text{ telle que } (X_1, \dots, X_n) = \phi_n(R_1, \dots, R_n) \text{ et qu'il s'agit de l'application} \\ \qquad \phi_n : (r_1, \dots, r_n) \mapsto \left(a + r_1, \dots, a + \sum_{i=1}^{n} r_i\right)\,.\end{array}}$

   Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. Soit $(r_1, \dots, r_n) \in \{-1, 1\}^n$ un antécédent de $(x_1, \dots, x_n)$ par ϕ_n. On a $x_1 = a + r_1$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $x_k = x_{k-1} + r_k$. On a donc $r_1 = x_1 - a$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $r_k = x_k - x_{k-1}$.
   Ainsi, le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ admet au plus un antécédent par ϕ_n et il s'agit du n-uplet $(x_1 - a, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$.
   $\boxed{\text{L'application } \phi_n \text{ est donc injective.}}$

3. (a) On a $p_0 = \mathbb{P}(N_1 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = a+1) = 0$ puisque $X_0 = a$, et

$$p_1 = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \mathbb{P}(X_0 \leq a,\ X_1 = a+1) = \mathbb{P}(X_1 = a+1) = \mathbb{P}(R_1 = 1) = p\,.$$

En résumé, on a donc $\boxed{p_0 = 0 \text{ et } p_1 = p}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\{N_1 = k\} &= \{X_1 \leq a,\ \ldots,\ X_{k-1} \leq a,\ X_k = a+1\}\\ &= \{R_1 \leq 0,\ \ldots,\ R_1 + \ldots + R_{k-1} \leq 0,\ R_1 + \ldots + R_k = 1\}\,.\end{aligned}$$

On note $A_k = \left\{(r_1, \ldots, r_k) \in \{-1,1\}^k \;\middle|\; \forall p \in [\![1, k-1]\!],\ \sum_{i=1}^{p} r_i \leq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{k} r_i = 1\right\}$ l'image réciproque de $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq a\}^{k-1} \times \{a+1\}$ par l'application ϕ_k.
On a alors $\boxed{\{N_1 = k\} = \{(R_1, \ldots, R_k) \in A_k\}}$.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((R_{n+1}, \ldots, R_{n+k}) \in A_k)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(r_1,\ldots,r_k)\in A_k} \{R_{n+1} = r_1, \ldots, R_{n+k} = r_k\}\right)\\ &= \sum_{(r_1,\ldots,r_k)\in A_k} \mathbb{P}(R_{n+1} = r_1, \ldots, R_{n+k} = r_k) \qquad \text{(évènements deux à deux disjoints)}\\ &= \sum_{(r_1,\ldots,r_k)\in A_k} \mathbb{P}(R_{n+1} = r_1)\ldots\mathbb{P}(R_{n+k} = r_k) \qquad \text{(indépendance mutuelle)}\\ &= \sum_{(r_1,\ldots,r_k)\in A_k} \mathbb{P}(R_1 = r_1)\ldots\mathbb{P}(R_k = r_k) \qquad \text{(pour tout } i \in \mathbb{N},\ R_{n+i} \text{ et } R_i \text{ ont même loi)}\\ &= \mathbb{P}((R_1, \ldots, R_k) \in A_k) \qquad \text{(même raisonnement qu'au début du calcul)}\,.\end{aligned}$$

D'après la question 3(b), on a donc $\boxed{\mathbb{P}((R_{n+1}, \ldots, R_{n+k}) \in A_k) = \mathbb{P}(N_1 = k) = p_k}$.

(d) Soient k et n deux entiers tels que $1 \leq k < n$. On a

$$\begin{aligned}\{N_1 = k, N_2 = n\} &= \{X_1 \leq a,\ \ldots,\ X_{k-1} \leq a,\ X_k = a+1,\\ &\qquad X_{k+1} \leq a+1,\ \ldots,\ X_{n-1} \leq a+1,\ X_n = a+2\}\\ &= \{R_1 \leq 0,\ \ldots,\ R_1 + \ldots + R_{k-1} \leq 0,\ R_1 + \ldots + R_k = 1,\\ &\qquad R_1 + \ldots + R_{k+1} \leq 1,\ \ldots,\ R_1 + \ldots + R_{n-1} \leq 1,\ R_1 + \ldots + R_n = 2\}\\ &= \{R_1 \leq 0,\ \ldots,\ R_1 + \ldots + R_{k-1} \leq 0,\ R_1 + \ldots + R_k = 1,\\ &\qquad R_{k+1} \leq 0,\ \ldots,\ R_{k+1} + \ldots + R_{n-1} \leq 0,\ R_{k+1} + \ldots + R_n = 1\}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\{N_1 = k,\ N_2 = n\} = \{(R_1, \ldots, R_k) \in A_k,\ (R_{k+1}, \ldots, R_n) \in A_{n-k}\}}$ par définition des A_i.

(e) Soit $n_2 \in \mathbb{N}^*$.

i. D'après la question 3(d), pour tout $n_1 \in [\![1, n_2]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1 = n_1,\ N_2 = n_2) &= \mathbb{P}((R_1, \ldots, R_{n_1}) \in A_{n_1},\ (R_{n_1+1}, \ldots, R_{n_2}) \in A_{n_2-n_1})\\ &\underset{\text{indépendance}}{=} \mathbb{P}((R_1, \ldots, R_{n_1}) \in A_{n_1})\mathbb{P}((R_{n_1+1}, \ldots, R_{n_2}) \in A_{n_2-n_1}) \underset{\text{question 3(c)}}{=} p_{n_1}p_{n_2-n_1}\,.\end{aligned}$$

Si $n_1 = 0$, on a $\mathbb{P}(N_1 = n_1,\ N_2 = n_2) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 = p_{n_1}p_{n_2-n_1}$ également.
En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n_1 < n_2, \text{ on a } \mathbb{P}(N_1 = n_1,\ N_2 = n_2) = p_{n_1}p_{n_2-n_1}}$.

ii. Si $n_1 = n_2$, alors l'évènement

$$\{N_1 = n_1,\ N_2 = n_2\} = \{X_1 \leq a,\ \ldots,\ X_{n_1-1} \leq a,\ X_{n_1} = a+1,\\ X_{n_1+1} \leq a+1,\ \ldots,\ X_{n_2-1} \leq a+1,\ X_{n_2} = a+2\}$$

est impossible car $a+1 \neq a+2$. Cet évènement est également impossible si $n_1 > n_2$ car on a $a+2 > a$. On a donc $\boxed{\mathbb{P}(N_1 = n_1,\ N_2 = n_2) = 0 \text{ si } n_1 \geq n_2}$.
Enfin, l'évènement

$$\{N_1 = +\infty,\ N_2 = n_2\} = \{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \leq a\} \cap \{X_1 \leq a+1,\ \ldots,\ X_{n_2-1} \leq a+1,\ X_{n_2} = a+2\}$$

étant également impossible, on a $\boxed{\mathbb{P}(N_1 = +\infty,\ N_2 = n_2) = 0}$.

4. Soit un entier $n > 1$. De manière analogue à la question 3(b), on définit

$$B_{n-1} = \left\{ (r_1, \ldots, r_{n-1}) \in \{-1, 1\}^{n-1} \ \middle|\ \forall p \in [\![1, n-2]\!],\ \sum_{i=1}^{p} r_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n-1} r_i = 2 \right\},$$

de sorte que $\{N_2 = n-1\} = \{(R_1, \ldots, R_{n-1}) \in B_{n-1}\}$.
Comme $n > 1$, on a $\{N_1 = n\} \subset \{R_1 = -1\}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 = n) &= \mathbb{P}(N_1 = n,\ R_1 = -1) \\
&= \mathbb{P}(R_1 = -1,\ X_1 = a-1,\ X_2 \leq a,\ \ldots,\ X_{n-1} \leq a,\ X_n = a+1) \\
&= \mathbb{P}(R_1 = -1,\ R_1 + R_2 \leq 0,\ \ldots,\ R_1 + \ldots + R_{n-1} \leq 0,\ R_1 + \ldots + R_n = 1) \\
&= \mathbb{P}(R_1 = -1,\ R_2 \leq 1,\ \ldots,\ R_2 + \ldots + R_{n-1} \leq 1,\ R_2 + \ldots + R_n = 2) \\
&= \mathbb{P}(R_1 = -1,\ (R_2, \ldots, R_n) \in B_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(R_1 = -1)\mathbb{P}((R_2, \ldots, R_n) \in B_{n-1}) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \mathbb{P}(R_1 = -1)\mathbb{P}(N_2 = n-1)\,.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi bien $\boxed{p_n = q\mathbb{P}(N_2 = n-1)}$.

De plus, la famille constituée des évènements $\{N_1 = n_1\}$, $n_1 \in \mathbb{N}$, et de l'évènement $\{N_1 = +\infty\}$ est un système complet d'évènements. En effet, ces évènements sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'évènement certain. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2 = n-1) &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_1 = n_1,\ N_2 = n-1) + \mathbb{P}(N_1 = +\infty,\ N_2 = n-1) \\
&= \sum_{n_1=1}^{n-2} \mathbb{P}(N_1 = n_1,\ N_2 = n-1) + 0 \qquad \text{(question 3(e)ii.)} \\
&= \sum_{n_1=1}^{n-2} p_{n_1} p_{n-1-n_1} \qquad \text{(question 3(e)i.)}\,.
\end{aligned}$$

On en conclut que $\boxed{p_n = q(p_1 p_{n-2} + p_2 p_{n-3} + \ldots + p_{n-2} p_1)}$.

5. *Remarque.* Le sujet semble admettre que la fonction G est définie sur $[0,1]$. Soit $s \in [0,1[$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n s^n$ est positive et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n s^n \leq s^n$. Comme $s \in [0,1[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} s^n$ converge donc, par comparaison de séries positives, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n s^n$ converge également. La fonction G est donc définie sur $[0,1[$. Le fait que G est définie en 1 est une conséquence de la question 7. Dans ce corrigé, on considère donc, à ce stade, que la fonction G est la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n s^n$,

dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Le produit de Cauchy de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n s^n$ par elle-même est la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n s^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}$. D'après le cours, ce produit de Cauchy a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et, pour tout $s \in [0,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = G(s)^2$.

Ainsi, pour tout $s \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned} G(s) - ps = \sum_{n=2}^{+\infty} p_n s^n &\underset{\text{(question 4)}}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} q(p_1 p_{n-2} + p_2 p_{n-3} + \ldots + p_{n-2}p_1)s^n \\ &\underset{p_0=0}{=} qs \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-1-k} \right) s^{n-1} = qs \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} s^{n-1} = qs \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n \underset{a_0=0}{=} qsG(s)^2 . \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{G(s) - ps = qsG(s)^2 \text{ pour tout } s \in [0,1[}$.

Remarque. À ce stade, la relation n'est pas valable en $s = 1$.

6. On a $G(0) = p_0 = 0$.
De plus, soit $s \in]0,1[$. Le polynôme du second degré $qsX^2 - X + ps$ a pour discriminant $1 - 4pqs^2$. Or, on a $4pq = 4p(1-p) \leq 1$ (inégalité polynomiale classique) et $s^2 < 1$ donc $1 - 4pqs^2 > 0$. Le polynôme admet donc deux racines réelles, qui sont $\alpha(s) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}$ et $\beta(s) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}$.
D'après la question 5, $G(s)$ est l'une de ces deux racines.
Or, la fonction G est la somme d'une série entière donc elle est continue sur son intervalle ouvert de convergence. En particulier, G est continue sur $]0,1[$. Or, les fonctions $s \mapsto \alpha(s)$ et $s \mapsto \beta(s)$ sont continues sur $]0,1[$ et, pour tout $s \in]0,1[$, on a $\alpha(s) > \beta(s)$. Par conséquent, soit $G(s) = \alpha(s)$ pour tout $s \in]0,1[$, soit $G(s) = \beta(s)$ pour tout $s \in]0,1[$. De plus, G est aussi continue en 0. Or, $\alpha(s)$ admet une limite en 0^+ égale à $+\infty$. On a donc nécessairement $G(s) = \beta(s)$ pour tout $s \in]0,1[$.
On en conclut que $\boxed{G(s) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs} \text{ pour tout } s \in]0,1[\text{ et } G(0) = 0}$.
Remarque. À ce stade, $G(1)$ n'est pas encore défini. En particulier, on n'a pas encore $G(1) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2q}$.

7. Les évènements $\{N_1 = n\}$, $n \in \mathbb{N}$, étant deux à deux disjoints, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_1 = n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{N_1 = n\} \right)$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \mathbb{P}(N_1 \neq +\infty)$. Cela justifie la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$. De plus, $\boxed{\text{la somme } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \text{ représente la probabilité que la somme } a+1 \text{ soit atteinte au cours du jeu}}$.
Remarque. La fonction G est donc définie en 1. En raisonnant comme dans la question 5 en remplaçant le produit de Cauchy des séries entières par le produit de Cauchy des séries absolument convergentes, on peut montrer que $G(1)$ vérifie la relation $G(1) - p = qG(1)^2$ puis, par le même raisonnement qu'à la question 6, que $G(1)$ est égal à $\alpha(1) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4pq}}{2q}$ ou à $\beta(1) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2q}$.
Dans la suite de la question, on admet que la fonction G continue en 1 et donc que $G(1) = \beta(1)$. La continuité de G en 1 est par exemple obtenue par le théorème d'Abel, qui n'est pas au programme de PT.

Puisque $1-4pq = 1-4p(1-p) = 1-4p+4p^2 = (1-2p)^2$, on a $G(1) = \beta(1) = \dfrac{1-|1-2p|}{2q}$.

— Si $p \geq \dfrac{1}{2}$, alors on a $G(1) = \dfrac{1-(2p-1)}{2q} = \dfrac{2-2p}{2q} = 1$.

— Si $p < \dfrac{1}{2}$, alors on a $G(1) = \dfrac{1-(1-2p)}{2q} = \dfrac{2p}{2q} = \dfrac{p}{q}$.

On a donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2} \\ \frac{p}{q} & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}}$.

La somme $a+1$ est donc presque sûrement atteinte au cours du jeu si, à chaque partie, la probabilité de gagner un euro est supérieure à celle de perdre un euro. Dans le cas contraire, la probabilité de ne jamais atteindre la somme de $a+1$ euros au cours du jeu est non nulle.